## 01-1

▶ 2023년 고3 06월 평가원 공통 12번

$a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}$ $(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 $A$, $B$를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{20}$의 값의 합은?

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

## 01-2

▶ 변형문항

$a_2=3$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$ $(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 $A$, $B$를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots,\ a_7\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{10}$의 값의 합은?

① 70 ② $\dfrac{482}{7}$ ③ 65 ④ $\dfrac{428}{7}$ ⑤ $\dfrac{415}{7}$

Infinite

## 02-1

▶ 2023년 고3 04월 교육청 공통 20번

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $S_n$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{13}$의 값을 구하시오.

(가) $S_n$은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
(나) $|S_m|=|S_{2m}|=162$인 자연수 $m$ $(m>8)$이 존재한다.

## 02-2

▶ 변형문항

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $S_n$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_{11}$의 값을 구하시오.

(가) $S_n$은 $n=12$, $n=13$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $|S_m|=|S_{2m}|=300$인 자연수 $m$ $(m>13)$이 존재한다.

## 03-1

▶ 2023년 고3 09월 평가원 공통 21번

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $a_7$이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, $a_2$의 값을 구하시오.

## 03-2

▶ 변형문항

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자. $a_{10}$이 7의 배수이고 $\sum_{k=1}^{10} S_k = 495$일 때, $a_2$의 값을 구하시오.

## 04-1

▶ 2023년 고3 07월 교육청 공통 12번

모든 항이 정수이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 $m$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$
>
> (나) $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| < 13$

$24 < a_{21} < 29$일 때, $m$의 값은?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

## 04-2

▶ 변형문항

모든 항이 정수이고 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 $m$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2m} a_k > 0$
>
> (나) $|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| < 18$

$28 < a_{13} < 34$일 때, $m$의 값은?

① 8　② 11　③ 14　④ 17　⑤ 20

## 05-1

▶ 2023년 고2 09월 교육청 공통 29번

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값을 구하시오.

(가) 모든 자연수 $k$에 대하여 $a_k$는 $x$에 대한 방정식
$x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$의 근이다.
(나) $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 $n$의 개수는 2이다.

## 05-2

▶ 변형문항

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값을 구하시오.

(가) 모든 자연수 $k$에 대하여 $a_k$는 $x$에 대한 방정식
$x^2+5x+(9-k)(k-4)=0$의 근이다.
(나) $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 $n$의 개수는 2이다.

① $-36$ ② $-11$ ③ $-9$
④ $-6$ ⑤ $5$

## 06-1

▶ 2023년 고2 09월 교육청 공통 19번

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 네 수 $a_1$, $a_3$, $a_5$, $a_7$은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다.
(나) $8$ 이하의 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n \times a_{9-n} = 75$이다.

$a_1 + a_2 = \frac{10}{3}$, $\sum_{k=1}^{8} a_k = \frac{400}{3}$일 때, $a_3 + a_8$의 값은?

① $\frac{110}{3}$ ② $40$ ③ $\frac{130}{3}$
④ $\frac{140}{3}$ ⑤ $50$

## 06-2

▶ 변형문항

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 네 수 $a_2$, $a_4$, $a_6$, $a_8$은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다.
(나) $8$ 이하의 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n \times a_{9-n} = 200$이다.

$a_1 + a_2 = 10$, $\sum_{k=1}^{8} a_k = 150$일 때, $a_1 + a_5$의 값은?

① $20$ ② $25$ ③ $30$
④ $35$ ⑤ $40$

## 07-1

▶ 2023년 고2 09월 교육청 공통 17번

모든 항이 양수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4+a_6$의 최솟값은?

| |
|---|
| (가) 모든 자연수 $n$에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이다.<br>(나) $a_3\times a_{22}=a_7\times a_8+10$ |

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

## 07-2

▶ 변형문항

모든 항이 양수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4$의 최솟값은?

| |
|---|
| (가) 모든 자연수 $n$에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이다.<br>(나) $a_6\times a_{17}=a_9\times a_{11}+30$ |

① 8 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 20

## 08-1

▶ 2023년 고3 09월 평가원 공통 12번

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?

① 172 ② 175 ③ 178
④ 181 ⑤ 184

## 08-2

▶ 변형문항

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_1+a_4=36$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?

## 09-1

▶ 2023년 고3 07월 사관학교 공통 13번

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = -3$, $a_{20} = 1$이고, 3 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0
④ $-1$ ⑤ $-2$

## 09-2

▶ 변형문항

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_{20} = 10$이고, 3 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n-1}$$

을 만족시킨다. $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$의 최댓값은?

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

## 10-1

▶ 2023년 고2 11월 교육청 공통 15번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$과 상수 $k$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n + S_n = k$이다. |

$S_6 = 189$일 때, $k$의 값은?

① 192 ② 196 ③ 200
④ 204 ⑤ 208

## 10-2

▶ 변형문항

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{S_n\}$과 상수 $k$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| 모든 자연수 $n$에 대하여 $2 \times a_n + S_n = k$이다. |

$S_6 = 665$일 때, $k$의 값은?

# 11-1

▶ 2023년 고3 06월 평가원 공통 15번

자연수 $k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \leq 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 $k$의 값의 합은?

① 10 ② 14 ③ 18
④ 22 ⑤ 26

# 11-2

▶ 변형문항

자연수 $k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 $n$에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n - k & (a_n \leq 0) \\ a_n - n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 $k$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

# 12-1

▶ 2023년 고3 03월 교육청 공통 15번

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 $a_2$의 값의 합은?

① 60 ② 64 ③ 68
④ 72 ⑤ 76

# 12-2

▶ 변형문항

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=5$일 때, $a_6=16$가 되도록 하는 모든 $a_2$의 값의 합은?

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

## 13-1

▶ 2023년 고3 07월 교육청 공통 15번

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 < 300$

(나) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?

① 315 ② 321 ③ 327 ④ 333 ⑤ 339

## 13-2

▶ 변형문항

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{5}a_n & (\log_5 a_n \text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 11 & (\log_5 a_n \text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 70$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?

① 115 ② 121 ③ 127 ④ 133 ⑤ 139

**14-1** ▶ 2023년 고2 09월 교육청 공통 21번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $n$이 3의 배수가 아닌 경우 $a_{n+1}=(-1)^n \times a_n$이다.
> (나) $n$이 3의 배수인 경우 $a_{n+3}=-a_n-n$이다.

$a_{20}+a_{21}=0$일 때, $\sum_{k=1}^{18} a_k$의 값은?

① 57　② 60　③ 63
④ 66　⑤ 69

**14-2** ▶ 변형문항

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $n$이 3의 배수가 아닌 경우 $a_{n+1}=(-1)^n \times a_n$이다.
> (나) $n$이 3의 배수인 경우 $a_{n+3}=a_n-n$이다.

$a_{18}+a_{21}=0$일 때, $\sum_{k=1}^{18} a_k$의 값은?

① 57　② 43　③ 37
④ 27　⑤ 13

## 15-1

▶ 2023년 고3 10월 교육청 공통 15번

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우})\\ a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

이다.

(나) $a_3>a_5$

$50<a_4+a_5<60$이 되도록 하는 $a_1$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

## 15-2

▶ 변형문항

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n-2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우})\\ a_n+4n+2 & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

이다.

(나) $a_3\le a_5$

$20<a_4+a_5<30$이 되도록 하는 $a_1$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M+m$의 값은?

## 16-1

▶ 2023년 고3 11월 평가원 공통 15번

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?

① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

## 16-2

▶ 변형문항

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}4^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=6$이 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?

## 17-1

▶ 2023년 고2 11월 교육청 공통 21번

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) $a_5=63$
(나) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\times a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_{n+1}+a_n-2 & (a_{n+1}\times a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 16 ② 19 ③ 22 ④ 25 ⑤ 28

## 17-2

▶ 변형문항

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M+m$의 값은?

(가) $a_5=45$
(나) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\times a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_{n+1}+a_n-2 & (a_{n+1}\times a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 17 ② 20 ③ 23 ④ 26 ⑤ 29

Infinite

## 18-1

▶ 2024년 고3 05월 교육청 공통 15번

**첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여**

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \\ \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

**를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?**

① 63 ② 66 ③ 69 ④ 72 ⑤ 75

## 18-2

▶ 변형문항

**첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여**

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \\ \dfrac{{a_n}^2+2}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

**를 만족시킬 때, $a_4+a_5=8$가 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 합은?**

① 186 ② 190 ③ 194 ④ 198 ⑤ 202

## 19-1

▶ 2023년 고3 04월 교육청 공통 15번

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은?

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$ 이다.

(나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

## 19-2

▶ 변형문항

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1$의 값을 $m$이라 할 때, $\log_3 m$의 값은?

(가) 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_3 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$ 이다.

(나) $a_4 + a_5 = 1$

① 12 ② 18 ③ 21
④ 27 ⑤ 33

## 20-1

▶ 2024년 고3 03월 교육청 공통 15번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 3n-2-a_n & (a_n\le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 곱은?

① 20　② 30　③ 40　④ 50　⑤ 60

## 20-2

▶ 변형문항

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 4n-3-a_n & (a_n\le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=8$가 되도록 하는 모든 $a_1$의 값의 곱은?

① $-64$　② $-60$　③ $-56$　④ $-52$　⑤ $-48$

# 빠른정답

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1-1** | ⑤ | **1-2** | ④ | **2-1** | 30 | **2-2** | 8 | **3-1** | 19 | **3-2** | 5 |
| **4-1** | ③ | **4-2** | ① | **5-1** | 5 | **5-2** | ③ | **6-1** | ⑤ | **6-2** | ② |
| **7-1** | ④ | **7-2** | ⑤ | **8-1** | ① | **8-2** | 61 | **9-1** | ⑤ | **9-2** | ① |
| **10-1** | ① | **10-2** | 729 | **11-1** | ② | **11-2** | ② | **12-1** | ③ | **12-2** | ③ |
| **13-1** | ④ | **13-2** | ⑤ | **14-1** | ③ | **14-2** | ④ | **15-1** | ② | **15-2** | 100 |
| **16-1** | ③ | **16-2** | 149 | **17-1** | ④ | **17-2** | ⑤ | **18-1** | ④ | **18-2** | ④ |
| **19-1** | ④ | **19-2** | ④ | **20-1** | ③ | **20-2** | ③ | | | | |

## 01-1 [정답] ⑤

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면 $a_2 = -4$이므로

$a_1 + d = -4\,(d \neq 0)$ …… ㉠

또한 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1}\,(n \geq 1)$이라 하면 두 집합 $A$, $B$를

$A = \{a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ a_1+4d\}$

$B = \{2a_1+d,\ 2a_1+3d,\ 2a_1+5d,\ 2a_1+7d,\ 2a_1+9d\}$

로 놓을 수 있고 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $2a_1+d$, 공차가 $2d$인 등차수열이다. 이때 $n(A \cap B) = 3$이 되려면 다음과 같이 세 경우를 생각해 볼 수 있다.

(ⅰ) $a_1 = b_1$일 때

즉, $a_1 = 2a_1 + d$에서 $a_1 = -d$이므로 조건 ㉠에 위배된다.

(ⅱ) $a_1 = b_2$일 때

즉, $a_1 = 2a_1 + 3d$에서 $a_1 = -3d$

㉠과 연립하면 $a_1 = -6$, $d = 2$

$\therefore\ a_{20} = -6 + 19 \times 2 = 32$

(ⅲ) $a_1 = b_3$일 때

즉, $a_1 = 2a_1 + 5d$에서 $a_1 = -5d$

㉠과 연립하면 $a_1 = -5$, $d = 1$

$\therefore\ a_{20} = -5 + 19 \times 1 = 14$

이상에서 조건을 만족하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{20}$의 값의 합은

$32 + 14 = 46$

## 01-2 [정답] ④

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면 $a_2 = 3$이므로

$a_1 + d = 3\,(d \neq 0)$ …… ㉠

또한 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}\,(n \geq 1)$이라 하면 두 집합 $A$, $B$를

$A = \{a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ a_1+4d,\ a_1+5d,\ a_1+6d\}$

$B = \{3a_1+3d,\ 3a_1+6d,\ 3a_1+9d,\ 3a_1+12d,\ 3a_1+15d\}$

로 놓을 수 있고 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $3a_1+3d$, 공차가 $3d$인 등차수열이다. 이때 $n(A \cap B) = 3$이 되려면 다음과 같이 네 경우를 생각해 볼 수 있다.

(ⅰ) $a_1 = b_1$일 때

즉, $a_1 = 3a_1 + 3d$에서 $a_1 = -\frac{3}{2}d$에서

$d = -6$이므로 $a_1 = 9$

$A = \{9,\ 3,\ -3,\ -9,\ -15,\ -21,\ -27\}$

$B = \{9,\ -9,\ -27,\ -45,\ -63\}$

$n(A \cap B) = 3$

따라서 $a_{10} = 75$

(ⅱ) $a_1 = b_2$일 때

즉, $a_1 = 3a_1 + 6d$에서 $a_1 = -3d$

㉠과 연립하면 $a_1 = \frac{9}{2}$, $d = -\frac{3}{2}$

$A = \left\{\frac{9}{2},\ 3,\ \frac{3}{2},\ 0,\ -\frac{3}{2},\ -3,\ -\frac{9}{3}\right\}$

$B = \left\{9,\ \frac{9}{2},\ 0,\ -\frac{9}{2},\ -9\right\}$

$n(A \cap B) = 3$

$\therefore\ a_{10} = -1 + 9 \times (-1) = -10$

(ⅲ) $a_1 = b_3$일 때

즉, $a_1 = 3a_1 + 9d$에서 $2a_1 = -9d$

㉠과 연립하면 $a_1 = \frac{27}{7}$, $d = -\frac{6}{7}$

$A = \left\{\frac{27}{7},\ 3,\ \frac{15}{7},\ \frac{9}{7},\ \frac{3}{7},\ -\frac{3}{7},\ -\frac{9}{7}\right\}$

$B = \left\{9,\ \frac{45}{7},\ \frac{27}{7},\ \frac{9}{7},\ -\frac{9}{7}\right\}$

$n(A \cap B) = 3$

$\therefore\ a_{10} = a_1 + 9d = -a_1 = -\frac{27}{7}$

이상에서 조건 $n(A \cap B) = 3$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{10}$의 값의 합은 $\frac{428}{7}$

## 02-1 [정답] 30

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_8 = S_8 - S_7 = 0$이므로

$a_8 = a_1 + 7d = 0$에서 $a_1 = -7d$

$S_n$의 값은 $n = 8$에서 최소이므로 $S_9 \geq S_8$

$a_9 = a_8 + d$

$= d \geq 0$

$d = 0$이면 $a_1 = 0$에서 모든 자연수 $n$에 대하여

$S_n = 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $d > 0$

$n \geq 9$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n > 0$이므로

$m > 8$일 때 $S_{2m} > S_m$

조건 (나)에 의하여

$-S_m = S_{2m} = 162$

$-\frac{m\{2a_1 + (m-1)d\}}{2} = \frac{2m\{2a_1 + (2m-1)d\}}{2}$

$14d - (m-1)d = -28d + 2(2m-1)d$

$-m + 15 = 4m - 30$에서

$m = 9$

$S_9 = \frac{9(-14d + 8d)}{2} = -162$에서

$d = 6$, $a_1 = -42$

따라서

$a_{13}=a_1+12d$
$=-42+12\times6$
$=30$

## 02-2 [정답] 8

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하면
조건 (가)에 의하여 $a_{13}=S_{13}-S_{12}=0$이므로
$a_{13}=a_1+12d=0$에서 $a_1=-12d$
$S_n$의 값은 $n=13$에서 최대이므로 $S_{14}\le S_{13}$
$a_{14}=a_{13}+d$
$=d\le0$
$d=0$이면 $a_1=0$에서 모든 자연수 $n$에 대하여
$S_n=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $d<0$
$n\ge14$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n<0$이므로
$m>13$일 때 $S_{2m}<S_m$
조건 (나)에 의하여
$S_m=-S_{2m}=162$
$\frac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}=-\frac{2m\{2a_1+(2m-1)d\}}{2}$
$-24d+(m-1)d=48d-2(2m-1)d$
$m-25=-4m+50$에서
$m=15$
$S_{15}=\frac{15(-24d+14d)}{2}=300$에서
$d=-4,\ a_1=48$
따라서
$a_{11}=a_1+10d$
$=48+10\times(-4)$
$=8$

## 03-1 [정답] 19

[해설]
$S_n$이 등차수열의 합이므로 모든 자연수 $n$에 대하여
$S_n=pn^2+qn$ ($p$, $q$는 상수)
라 하면 $a_n=2pn-p+q$
모든 항이 자연수이므로 $2p$는 음이 아닌 정수이다.
$$\sum_{n=1}^{7}S_n=\sum_{n=1}^{7}(pn^2+qn)$$
$$=p\times\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+q\times\frac{7\cdot8}{2}$$
$$=140p+28q=644$$
$$\therefore\ 5p+q=23$$
$S_1=a_1=p+q=-4p+23\ge1$에서 $p\le\frac{11}{2}$
$a_7=S_7-S_6=13p+q=8p+23$에서
$a_7=8p+23\le67$
$a_7$이 13의 배수이므로 가능한 수는 13, 26, 39, 52, 65이다.
이 중에서 $2p$가 정수인 경우는
$a_7=8p+23=39$
일 때이다.
따라서 $p=2$이고, $a_2=3p+q=-2p+23=19$이다.

## 03-2 [정답] 5

[해설]
$S_n$이 등차수열의 합이므로 모든 자연수 $n$에 대하여
$S_n=pn^2+qn$ ($p$, $q$는 상수)
라 하면 $a_n=2pn-p+q$
모든 항이 자연수이므로 $2p$는 음이 아닌 정수이다.
$$\sum_{n=1}^{10}S_n=\sum_{n=1}^{10}(pn^2+qn)$$
$$=p\times\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+q\times\frac{10\cdot11}{2}$$
$$=385p+55q=495$$
$$\therefore\ 7p+q=9$$
$S_1=a_1=p+q=-6p+9\ge1$에서 $p\le\frac{4}{3}$
$a_{10}=S_{10}-S_9=19p+q=12p+9$에서
$a_{10}=12p+9\le25$
$a_{10}$이 7의 배수이므로 가능한 수는 7, 14, 21이다.
이 중에서 $2p$가 정수인 경우는
$a_{10}=12p+9=21$
일 때이다.
따라서 $p=1$이고, $a_2=3p+q=-4p+9=5$이다.

## 04-1 [정답] ③

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하자.
조건 (가)에 의하여
$$\sum_{k=1}^{2m+1}a_k=\frac{(2m+1)\{2a+5\times(2m+1-1)\}}{2}$$
$$=(2m+1)(a+5m)<0$$
$2m+1>0$이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$
(ⅰ) $a_{m+1}=-1$인 경우
$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$이므로
조건 (나)를 만족시킨다.
$a_{m+1}=-1$이므로
$a_{m+6}=24,\ a_{m+7}=29$
$24<a_{21}<29$인 $a_{21}$이 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a_{m+1}=-2$인 경우
$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$이므로
조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1} = -2$이므로 $a_{m+7} = 28$

따라서 $m+7 = 21$이므로 $m = 14$

(ⅲ) $a_{m+1} \le -3$인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| \ge 13$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $m = 14$

## 04-2 [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{2m} a_k = \frac{(2m)\{2a+6\times(2m-1)\}}{2}$$

$$= (2m)(a+6m-3) > 0$$

$2m > 0$이므로 $a+6m = a_{m+1} > 3$

(ⅰ) $a_{m+1} = 4$인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 16$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1} = 4$이므로

$a_{m+5} = 28$, $a_{m+6} = 34$

$28 < a_{13} < 34$인 $a_{13}$이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_{m+1} = 5$인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| = 17$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1} = 5$이므로 $a_{m+5} = 29$

따라서 $m+5 = 13$이므로 $m = 8$

(ⅲ) $a_{m+1} \ge 6$인 경우

$|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| \ge 18$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $m = 8$

## 05-1 [정답] 5

[해설]

조건 (가)에 의해 실수 $a_k$ ($k$는 자연수)는

$x$에 대한 방정식 $x^2+3x+(8-k)(k-5)=0$의 근이므로

$(a_k+8-k)(a_k+k-5)=0$

$a_k = k-8$ 또는 $a_k = 5-k$

조건 (나)에서 $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 $10$ 이하의 두 자연수 $n$을 각각 $p$, $q$ $(p<q)$라 하자.

$a_6 = -2$ 또는 $a_6 = -1$,

$a_7 = -1$ 또는 $a_7 = -2$이므로

$\sum_{n=6}^{7} a_n$의 값이 최대가 되는 것은

$a_6 = a_7 = -1$일 때이고 $\sum_{n=6}^{7} a_n = -2$

$a_5 = -3$ 또는 $a_5 = 0$,

$a_8 = 0$ 또는 $a_8 = -3$이므로

$a_5$, $a_8$의 값에 따라 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값은 다음과 같다.

(ⅰ) $a_5 = a_8 = 0$이면

$a_4a_5 = a_5a_6 = a_7a_8 = a_8a_9 = 0$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_5 = 0$, $a_8 = -3$인 경우

$a_4a_5 = a_5a_6 = 0$이므로 $p=4$, $q=5$

$6 \le n \le 10$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고

$a_8 = -3 < 0$이므로 $a_9 = -4$, $a_{10} = -5$

$1 \le n \le 4$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고

$a_1 = 4$ 또는 $a_1 = -7$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되는 것은 $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$,

$a_4 = 1$일 때이다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{4} a_n + a_5 + \sum_{n=6}^{7} a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$

$$= 10+0+(-2)+(-3)+(-9) = -4$$

(ⅲ) $a_5 = -3$, $a_8 = 0$인 경우

$a_7a_8 = a_8a_9 = 0$이므로 $p=7$, $q=8$

$1 \le n \le 5$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고

$a_5 = -3 < 0$이므로

$a_1 = -7$, $a_2 = -6$, $a_3 = -5$, $a_4 = -4$

$9 \le n \le 10$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고 $a_9 = 1$ 또는 $a_9 = -4$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되는 것은

$a_9 = 1$, $a_{10} = 2$일 때이다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{4} a_n + a_5 + \sum_{n=6}^{7} a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$

$$= (-22)+(-3)+(-2)+0+3 = -24$$

(ⅳ) $a_5 = -3$, $a_8 = -3$인 경우

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되는 경우는

$1 \le n \le 4$에서 $a_n > 0$이고

$9 \le n \le 10$에서 $a_n > 0$일 때이다.

이때 $a_4a_5 < 0$, $a_8a_9 < 0$이므로 $p=4$, $q=8$

$a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_9 = 1$,

$a_{10} = 2$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{4} a_n + a_5 + \sum_{n=6}^{7} a_n + a_8 + \sum_{n=9}^{10} a_n$$

$$= 10+(-3)+(-2)+(-3)+3 = 5$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값은 5

[참고]

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지는 다음과 같다.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n-8$ | $-7$ | $-6$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $5-n$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |

$\{a_n\}$ : $4,\ 3,\ 2,\ 1,\ -3,\ -1,\ -1,\ -3,\ 1,\ 2,\ \cdots$

## 05-2 [정답] ③

[해설]

조건 (가)에 의해 실수 $a_k$ ($k$는 자연수)는

$x$에 대한 방정식 $x^2+5x+(9-k)(k-4)=0$의 근이므로

$(a_k+9-k)(a_k+k-4)=0$

$a_k=k-9$ 또는 $a_k=4-k$

조건 (나)에서 $a_n \times a_{n+1} \le 0$을 만족시키는 10 이하의 두 자연수 $n$을 각각 $p,\ q$ $(p<q)$라 하자.

$a_5=-4$ 또는 $a_5=-1$,

$a_6=-3$ 또는 $a_6=-2$,

$a_7=-2$ 또는 $a_7=-3$,

$a_8=-1$ 또는 $a_8=-4$이므로

$\sum_{n=5}^{9} a_n$의 값이 최대가 되는 것은

$a_6=a_7=-2,\ a_5=a_8=-1$일 때이고 $\sum_{n=5}^{9} a_n=-6$

$a_4=-5$ 또는 $a_4=0$,

$a_9=0$ 또는 $a_9=-5$이므로

$a_4,\ a_9$의 값에 따라 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값은 다음과 같다.

(ⅰ) $a_4=a_9=0$이면

$a_3a_4=a_4a_5=a_8a_9=a_9a_{10}=0$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4=0,\ a_9=-5$인 경우

$a_3a_4=a_4a_5=0$이므로 $p=3,\ q=4$

$5 \le n \le 10$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고

$a_9=-5<0$이므로 $a_{10}=-6$

$1 \le n \le 3$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고

$a_1=3$ 또는 $a_1=-8$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되는 것은 $a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=1$일 때이다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{3} a_n+a_4+\sum_{n=5}^{8} a_n+a_9+a_{10}$$
$$=6+0+(-6)+(-5)+(-6)=-11$$

(ⅲ) $a_4=-5,\ a_9=0$인 경우

$a_8a_9=a_9a_{10}=0$이므로 $p=8,\ q=9$

$1 \le n \le 4$에서 $a_n$의 부호는 모두 동일하고

$a_4=-5<0$이므로

$a_1=-8,\ a_2=-7,\ a_3=-6,\ a_4=-5$

$a_{10}=1$ 또는 $a_{10}=-6$이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되는 것은

$a_{10}=1$ 일 때이다.

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{3} a_n+a_4+\sum_{n=5}^{8} a_n+a_9+a_{10}$$
$$=(-26)+(-5)+(-6)+0+1=-36$$

(ⅳ) $a_4=-5,\ a_9=-5$인 경우

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값이 최대가 되는 경우는

$1 \le n \le 3$에서 $a_n>0$이고

$a_{10}>0$일 때이다.

이때 $a_3a_4<0,\ a_9a_{10}<0$이므로 $p=3,\ q=9$

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_{10}=1$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{3} a_n+a_4+\sum_{n=5}^{8} a_n+a_9+a_{10}$$
$$=6+(-5)+(-6)+(-5)+1=-9$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 최댓값은 $-9$

## 06-1 [정답] ⑤

[해설]

조건 (가), (나)에 의해

상수 $a$ $(a \ne 0)$, $r$ $(r>0)$에 대하여

$a_1=a,\ a_3=ar,\ a_5=ar^2,\ a_7=ar^3$

조건 (나)에 의해

$a_2=\frac{75}{a_7}=\frac{75}{ar^3},\ a_4=\frac{75}{a_5}=\frac{75}{ar^2}$

$a_6=\frac{75}{a_3}=\frac{75}{ar},\ a_8=\frac{75}{a_1}=\frac{75}{a}$

$$\sum_{k=1}^{8} a_k=(a_1+a_3+a_5+a_7)+(a_2+a_4+a_6+a_8)$$
$$=(a+ar+ar^2+ar^3)+\left(\frac{75}{ar^3}+\frac{75}{ar^2}+\frac{75}{ar}+\frac{75}{a}\right)$$
$$=a(1+r+r^2+r^3)+\frac{75}{ar^3}(1+r+r^2+r^3)$$
$$=(a_1+a_2)(1+r+r^2+r^3)$$

$a_1+a_2=\frac{10}{3},\ \sum_{k=1}^{8} a_k=\frac{400}{3}$이므로

$\frac{10}{3}(1+r+r^2+r^3)=\frac{400}{3}$

$r^3+r^2+r-39=(r-3)(r^2+4r+13)=0$

$r$는 실수이므로 $r=3$

$a_1+a_2=a+\frac{75}{ar^3}=a+\frac{75}{27a}=\frac{10}{3}$

$9a^2-30a+25=(3a-5)^2=0,\ a=\frac{5}{3}$

따라서 $a_3+a_8=ar+\frac{75}{a}=5+45=50$

[참고]

$a_1=\frac{5}{3}$, $a_2=\frac{5}{3}$, $a_3=5$, $a_4=5$, $a_5=15$,

$a_6=15$, $a_7=45$, $a_8=45$

## 06-2 [정답] ②

[해설]

조건 (가), (나)에 의해

상수 $a$ $(a\neq 0)$, $r$ $(r>0)$에 대하여

$a_2=a$, $a_4=ar$, $a_6=ar^2$, $a_8=ar^3$

조건 (나)에 의해

$a_1=\frac{200}{a_8}=\frac{200}{ar^3}$, $a_5=\frac{200}{a_4}=\frac{200}{ar}$

$a_3=\frac{200}{a_6}=\frac{200}{ar^2}$, $a_7=\frac{200}{a_2}=\frac{200}{a}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}a_k&=(a_1+a_3+a_5+a_7)+(a_2+a_4+a_6+a_8)\\&=(a+ar+ar^2+ar^3)+\left(\frac{200}{ar^3}+\frac{200}{ar^2}+\frac{200}{ar}+\frac{200}{a}\right)\\&=a(1+r+r^2+r^3)+\frac{200}{ar^3}(1+r+r^2+r^3)\\&=(a_1+a_2)(1+r+r^2+r^3)\end{aligned}$$

$a_1+a_2=10$, $\sum_{k=1}^{8}a_k=150$이므로

$10(1+r+r^2+r^3)=150$

$r^3+r^2+r-14=(r-2)(r^2+3r+7)=0$

$r$는 실수이므로 $r=2$

$a_1+a_2=a+\frac{200}{ar^3}=a+\frac{200}{8a}=10$

$a^2-10a+25=(a-5)^2=0$, $a=5$

따라서 $a_1+a_5=a+\frac{200}{ar}=5+20=25$

[참고]

$a_1=5$, $a_2=5$, $a_3=10$, $a_4=10$, $a_5=10$,

$a_6=20$, $a_7=40$, $a_8=40$

## 07-1 [정답] ④

[해설]

조건 (가)에 의해 모든 자연수 $n$에 대하여

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ 이므로

$a_{n+1}$은 $a_n$과 $a_{n+2}$의 등차중항이고

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$ $(a>0)$, 공차를 $d$ $(d\geq 0)$이라 하면

조건 (나)에서

$a_3\times a_{22}=(a+2d)(a+21d)=a^2+23ad+42d^2$

$$\begin{aligned}a_7\times a_8+10&=(a+6d)(a+7d)+10\\&=a^2+13ad+42d^2+10\end{aligned}$$

$a^2+23ad+42d^2=a^2+13ad+42d^2+10$이므로

$23ad=13ad+10$, $10ad=10$, $ad=1$

조건 (가)에 의해

$a_4+a_6=2a_5=2a+8d$

절대부등식의 성질에 의해

$a_4+a_6\geq 2\sqrt{2a\times 8d}=2\sqrt{16ad}=2\times 4=8$

(단, 등호는 $2a=8d$일 때 성립)

따라서 $a_4+a_6$의 최솟값은 8

[다른 풀이]

조건 (가)에 의해 모든 자연수 $n$에 대하여

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ 이므로

$a_{n+1}$은 $a_n$과 $a_{n+2}$의 등차중항이고

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$ $(d\geq 0)$이라 하자.

$a_4+a_6=2a_5$

조건 (나)에서

$a_3\times a_{22}=(a_5-2d)(a_5+17d)$

$a_7\times a_8+10=(a_5+2d)(a_5+3d)+10$이므로

$(a_5-2d)(a_5+17d)=(a_5+2d)(a_5+3d)+10$

$a_5^2+15da_5-34d^2=a_5^2+5da_5+6d^2+10$

$10da_5=40d^2+10$, $a_5=4d+\frac{1}{d}$

절대부등식의 성질에 의해

$a_4+a_6=2a_5=8d+\frac{2}{d}\geq 2\sqrt{8d\times\frac{2}{d}}=8$

(단, 등호는 $8d=\frac{2}{d}$일 때 성립)

따라서 $a_4+a_6$의 최솟값은 8

## 07-2 [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에 의해 모든 자연수 $n$에 대하여

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ 이므로

$a_{n+1}$은 $a_n$과 $a_{n+2}$의 등차중항이고

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$ $(a>0)$, 공차를 $d$ $(d\geq 0)$이라 하면

조건 (나)에서

$a_6\times a_{17}=(a+5d)(a+16d)=a^2+21ad+80d^2$

$$\begin{aligned}a_9\times a_{11}+20&=(a+8d)(a+10d)+30\\&=a^2+18ad+80d^2+30\end{aligned}$$

$a^2+21ad+80d^2=a^2+18ad+80d^2+30$이므로

$21ad=18ad+30$, $3ad=30$, $ad=10$

조건 (가)에 의해

$a_3+a_4=2a+5d$

절대부등식의 성질에 의해

$a_3+a_4\geq 2\sqrt{2a\times 5d}=2\sqrt{10ad}=2\times 10=20$

(단, 등호는 $2a=5d$일 때 성립)

따라서 $a_3+a_4$의 최솟값은 $20$

## 08-1 [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하자. 자연수 $a$를 자연수 $k$에 대하여 나타내면

(ⅰ) $a=4k-3$일 때

$a_2=4k-2$, $a_3=2k-1$, $a_4=2k$

$a_2+a_4=40$이므로

$6k-2=40$, $k=7$

$\therefore\ a=25$

(ⅱ) $a=4k-2$일 때

$a_2=2k-1$, $a_3=2k$, $a_4=k$

$a_2+a_4=40$이므로 $3k-1=40$

$3k-1=40$인 자연수 $k$의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) $a=4k-1$일 때

$a_2=4k$, $a_3=2k$, $a_4=k$

$a_2+a_4=40$이므로

$5k=40$, $k=8$

$\therefore\ a=31$

(ⅳ) $a=4k$일 때

$a_2=2k$, $a_3=k$

자연수 $k$를 자연수 $m$에 대하여 나타내면

(1) $k=2m-1$일 때

$a_4=2m=k+1$

$a_2+a_4=40$이므로

$3k+1=40$, $k=13$

$\therefore\ a=52$

(2) $k=2m$일 때

$a_4=m=\frac{k}{2}$

$a_2+a_4=40$이므로

$\frac{5}{2}k=40$, $k=16$

$\therefore\ a=64$

이상에서 자연수 $a$의 값은

$25$, $31$, $52$, $64$

$a_1$의 값은 $25$, $31$, $52$, $64$이므로 합은 $172$이다.

## 08-2 [정답] 61

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$라 하자. 자연수 $a$를 자연수 $k$에 대하여 나타내면

(ⅰ) $a=4k-3$일 때

$a_2=4k-4$, $a_3=2k-2$, $a_4=k-1$

$a_1+a_4=36$이므로

$5k-4=36$, $k=8$

$\therefore\ a=29$

(ⅱ) $a=4k-2$일 때

$a_2=2k-1$, $a_3=2k-2$, $a_4=k-1$

$a_1+a_4=36$이므로 $5k-3=36$

$5k-3=36$인 자연수 $k$의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) $a=4k-1$일 때

$a_2=4k-2$, $a_3=2k-1$, $a_4=2k-2$

$a_1+a_4=36$이므로

$6k-3=36$

, $6k-3=36$인 자연수 $k$의 값은 존재하지 않는다.

(ⅳ) $a=4k$일 때

$a_2=2k$, $a_3=k$

자연수 $k$를 자연수 $m$에 대하여 나타내면

(1) $k=2m-1$일 때

$a_4=2m-2=k-1$

$a_1+a_4=36$이므로

$5k-1=36$, $5k=37$

$5k-1=36$인 자연수 $k$의 값은 존재하지 않는다.

(2) $k=2m$일 때

$a_4=m=\frac{k}{2}$

$a_1+a_4=20$이므로

$\frac{9}{2}k=36$, $k=8$

$\therefore\ a=32$

이상에서 자연수 $a$의 값은

$29$, $32$

$a_1$의 값은 $29$, $32$이므로 합은 $61$이다.

## 09-1 [정답] ⑤

[해설]

$3$이상의 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 $n=3$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3=a_2$, $a_1+a_3=0$

이때 $a_1=-3$이므로 $a_3=3$

또한 ㉠에서

$$\sum_{k=1}^{n+1}a_k=a_n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}\quad(n\geq 3)$$

$a_2=k$로 놓고 $n$에 3, 4, 5, ⋯ 를 차례대로 대입하면

$$a_4=a_3-a_2=3-k$$
$$a_5=a_4-a_3=3-k-3=-k$$
$$a_6=a_5-a_4=-k-(3-k)=-3$$
$$a_7=a_6-a_5=-3+k$$
$$a_8=a_7-a_6=-3+k+3=k$$
$$a_9=a_8-a_7=k+3-k=3$$
$$\vdots$$

따라서 $a_n=a_{n+6}\quad(n\geq 2)$

$a_{20}=1$ 이므로

$$1=-3+\{k+3+(3-k)-k-3+(-3+k)\}\times 3+k+3$$
$$\therefore\ k=1$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{50}a_n=a_1+(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)\times 8+a_2$$
$$=-3+k$$
$$=-3+1=-2$$

## 09-2 [정답] ①

[해설]

3 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n-1}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

이므로 $n=3$을 대입하면

$$a_1+a_2+a_3=a_2,\qquad a_1+a_3=0$$

이때 $a_1=2$이므로 $a_3=-2$

또한 ㉠에서

$$\sum_{k=1}^{n+1}a_k=a_n\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉡−㉠을 하면

$$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}\quad(n\geq 3)$$

$a_2=k$로 놓고 $n$에 3, 4, 5, ⋯ 를 차례대로 대입하면

$$a_4=a_3-a_2=-2-k$$
$$a_5=a_4-a_3=-2-k+2=-k$$
$$a_6=a_5-a_4=-k-(-2-k)=2$$
$$a_7=a_6-a_5=2+k$$
$$a_8=a_7-a_6=2+k-2=k$$
$$a_9=a_8-a_7=k+2-k=2$$
$$\vdots$$

따라서 $a_n=a_{n+6}\quad(n\geq 2)$

$a_{20}=10$이므로

$$10=2+\{k+(-2)+(-2-k)-k+2+(2+k)\}\times 3+k+(-2)$$
$$\therefore\ k=10$$
$$\therefore\ \{a_n\}:2,\ 10,\ -2,\ -12,\ -10,\ 2,\ 12,\ 10,\ -2,\ -12,$$
$$-10,\ 2\ \cdots$$

따라서 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$의 최댓값은 $2+12+10=24$

## 10-1 [정답] ①

[해설]

$n=1$일 때, $a_1+S_1=2a_1=k$에서 $a_1=\dfrac{k}{2}$

$n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(k-a_n)-(k-a_{n-1})$$
$$=-a_n+a_{n-1}$$

이므로 $a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}\quad(n\geq 2)$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{k}{2}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_6=\dfrac{k}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{k}{64}$ $S_6=189$이므로 $a_6+S_6=k$에서

$$\frac{k}{64}+189=k$$

따라서 $k=192$

## 10-2 [정답] 729

[해설]

$n=1$일 때, $2a_1+S_1=3a_1=k$에서 $a_1=\dfrac{k}{3}$

$n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(k-2a_n)-(k-2a_{n-1})$$
$$=-2a_n+2a_{n-1}$$

이므로 $a_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}\quad(n\geq 2)$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{k}{3}$이고 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_6=\frac{k}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32k}{729}$$

$S_6=665$이므로 $2a_6+S_6=k$에서 $\dfrac{64k}{729}+665=k$

따라서 $k=729$

## 11-1 [정답] ②

[해설]

주어진 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $k$는 자연수이므로

$$a_1=k>0$$
$$a_2=a_1-2\times 1-k=-2<0$$
$$a_3=a_2+2\times 2-k=2-k$$

(ⅰ) $k=1$일 때,

$a_3=1$이므로

$a_4=a_3-2\times3-1=-6<0$

$a_5=a_4+2\times4-1=1>0$

$a_6=a_5+2\times5-1=-10>0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k=2$일 때,

$a_3=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $k\geq3$일 때,

$a_3=2-k<0$이므로

$a_4=a_3+6-k=8-2k$

(1) $k=3$일 때,

$a_3=-1,\ a_4=2$이므로

$a_5=a_4-8-3=-9<0$

$a_6=a_5+2\times5-3=-2<0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(2) $k=4$일 때,

$a_4=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(3) $k\geq5$일 때,

$a_4=8-2k<0$이므로

$a_5=a_4+8-k=16-3k$

(a) $k=5$일 때,

$a_3=-3,\ a_4=-2,\ a_5=1>0$이므로

$a_6=a_5-10-5=-14$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(b) $k\geq6$일 때,

$a_5=16-3k<0$이므로

$a_6=a_5+10-k=26-4k$

$a_3<0,\ a_4<0,\ a_5<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족시키기 위해서는

$26-4k>0,\qquad k<\frac{13}{2}$

$k\geq6$이므로 $\qquad 6\leq k<\frac{13}{2}$

따라서 자연수 $k$는 $6$이다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 모든 $k$의 값의 합은

$3+5+6=14$

## 11-2 [정답] ②

[해설]

주어진 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $k$는 자연수이므로

$a_1=k>0$

$a_2=a_1-1-k=-1<0$

$a_3=a_2+2-k=1-k$

(ⅰ) $k=1$일 때,

$a_3=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k\geq2$일 때,

$a_3=1-k<0$이므로

$a_4=a_3+3-k=4-2k$

(1) $k=2$일 때,

$a_4=a_3+3-2=0$

$a_4=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $k=3$일 때,

$a_3=-2,\ a_4=-2$이므로

$a_5=a_4+4-3=-1<0$

$a_6=a_5+5-3=1>0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

(3) $k=4$일 때,

$a_4=4-2k<0$이므로

$a_5=a_4+4-k=8-3k<0$

$a_6=a_5+5-k=13-4k=-3<0$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

(4) $k\geq5$일 때,

$a_5=8-3k<0$이므로

$a_6=a_5+5-k=13-4k$

$a_3<0,\ a_4<0,\ a_5<0$이므로

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$를 만족시키기 위해서는

$13-4k>0,\qquad k<\frac{13}{4}$

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.

이상에서 주어진 조건을 만족시키는 $k$의 값은 $3$

## 12-1 [정답] ③

[해설]

$a_5+a_4$가 홀수이면 $a_6$이 홀수이므로 $a_6=34$에 모순이다. 따라서 $a_5+a_4$는 짝수이고 $a_4,\ a_5$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

$a_4,\ a_5$가 모두 짝수이면 $a_3$도 짝수이고 마찬가지로 $a_2,\ a_1$도 모두 짝수이다. 이는 $a_1=1$에 모순이므로 $a_4,\ a_5$는 모두 홀수이다.

따라서 $a_1,\ a_4$는 모두 홀수이므로 가능한 $a_2,\ a_3$의 값은 다음과 같다.

(ⅰ) $a_2,\ a_3$이 모두 홀수인 경우

$a_2=2l-1$ ($l$은 자연수)라 하자.

$a_3=\frac{1}{2}(a_2+a_1)=l$

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+a_2)=\frac{3}{2}l-\frac{1}{2}$

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+a_3)=\frac{5}{4}l-\frac{1}{4}$

$a_6=\frac{1}{2}(a_5+a_4)=\frac{11}{8}l-\frac{3}{8}=34$

이므로 $l=25$이다.

따라서 $a_2=2\times25-1=49$

(ⅱ) $a_2$는 짝수, $a_3$은 홀수인 경우

$a_2 = 2m$ ($m$은 자연수)라 하자.

$a_3 = a_2 + a_1 = 2m+1$

$a_4 = a_3 + a_2 = 4m+1$

$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = 3m+1$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}m + 1 = 34$

이므로 $m$은 자연수가 아니다.

(iii) $a_2$는 홀수, $a_3$은 짝수인 경우

$a_2 = 2n-1$ ($n$은 자연수)라 하자.

$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = n$

$a_4 = a_3 + a_2 = 3n-1$

$a_5 = a_4 + a_3 = 4n-1$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}n - 1 = 34$

이므로 $n = 10$이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 10 - 1 = 19$

( i ), ( ii ), (iii)에서 모든 $a_2$의 값의 합은 $49 + 19 = 68$

## 12-2 [정답] ③

[해설]

$a_5 + a_4$가 홀수이면 $a_6$이 홀수이므로 $a_6 = 16$에 모순이다. 따라서 $a_5 + a_4$는 짝수이고 $a_4$, $a_5$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

$a_4$, $a_5$가 모두 짝수이면 $a_3$도 짝수이고 마찬가지로 $a_2$, $a_1$도 모두 짝수이다. 이는 $a_1 = 5$에 모순이므로 $a_4$, $a_5$는 모두 홀수이다.

따라서 $a_1$, $a_4$는 모두 홀수이므로 가능한 $a_2$, $a_3$의 값은 다음과 같다.

( i ) $a_2$, $a_3$이 모두 홀수인 경우

$a_2 = 2l-1$ ($l$은 자연수)라 하자.

$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = l+2, l$은 홀수

$a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_2) = \frac{3}{2}l + \frac{1}{2}$

$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = \frac{5}{4}l + \frac{5}{4}$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{11}{8}l + \frac{7}{8} = 16$

이므로 $l = 11$이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 11 - 1 = 21$

( ii ) $a_2$는 짝수, $a_3$은 홀수인 경우

$a_2 = 2m$ ($m$은 자연수)라 하자.

$a_3 = a_2 + a_1 = 2m+5$

$a_4 = a_3 + a_2 = 4m+5$

$a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_3) = 3m+5$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}m + 5 = 16$

이므로 $m$은 자연수가 아니다.

(iii) $a_2$는 홀수, $a_3$은 짝수인 경우

$a_2 = 2n-1$ ($n$은 자연수)라 하자.

$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) = n+2, n$은 짝수

$a_4 = a_3 + a_2 = 3n+1$

$a_5 = a_4 + a_3 = 4n+3$

$a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_4) = \frac{7}{2}n + 2 = 16$

이므로 $n = 4$이다.

따라서 $a_2 = 2 \times 4 - 1 = 7$

( i ), ( ii ), (iii)에서 모든 $a_2$의 값의 합은 $21 + 7 = 28$

## 13-1 [정답] ④

[해설]

( i ) $4 \le n \le 7$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5 = a_4 + 6$, $a_6 = a_5 + 6 = a_4 + 12$,

$a_7 = a_6 + 6 = a_4 + 18$이므로

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 4a_4 + 36 = 40$, $a_4 = 1$

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3)$은 $(27, 9, 3)$

그러므로 $a_1 = 27$

( ii ) $4 \le n \le 7$인 자연수 $n$에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 $n$이 존재하는 경우

$a_n = 3^m$ ($m$은 자연수)인 $n$ $(4 \le n \le 7)$이 존재한다.

$a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 $3^m$ $(m \ge 4)$가 존재하면

$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 $3^m$ $(m \ge 4)$가 존재하지 않는다.

또한 $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 27이 존재하지 않으면 $n = 4$, 5, 6, 7에 대하여 $\sum_{k=4}^{7} a_k < 40$

그러므로 $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 하나가 27이다.

만약 $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 하나가 27이면 $\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로

$a_4 = 27$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$

그러므로 $a_4 = 27$일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1 < 300$을 만족시키는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3)$은 $(69, 75, 81)$, $(237, 243, 81)$이므로

$a_1 = 69$ 또는 $a_1 = 237$

따라서 ( i ), ( ii )에 의하여

모든 $a_1$의 값의 합은 $27 + 69 + 237 = 333$

## 13-2 [정답] ⑤

[해설]

( i ) $4 \le n \le 7$인 모든 자연수 $n$에 대하여 $\log_5 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5 = a_4 + 11$, $a_6 = a_5 + 11 = a_4 + 22$,

$a_7 = a_6 + 11 = a_4 + 33$이므로

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 4a_4 + 66 = 70$, $a_4 = 1$

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3)$은 $(125, 25, 5)$ 또는 $(14, 25, 5)$

그러므로 $a_1 = 125$, $a_1 = 14$

( ii ) $4 \le n \le 7$인 자연수 $n$에 대하여 $\log_5 a_n$이 자연수인 $n$이 존재하는 경우

$a_n = 5^m$ ($m$은 자연수)인 $n$ $(4 \le n \le 7)$이 존재한다.

$a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 $5^m$ $(m \ge 3)$가 존재하면

$\sum_{k=4}^{7} a_k > 70$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 $5^m$ $(m \ge 3)$가 존재하지 않는다.

또한 $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 25가 존재하지 않으면 $n = 4$, 5, 6, 7에 대하여 $\sum_{k=4}^{7} a_k < 70$

그러므로 $a_4$, $a_5$, $a_6$, $a_7$ 중 하나가 25이다.

만약 $a_4 = 25$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 25 + 5 + 1 + 12 = 43$

만약 $a_5 = 25$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 14 + 25 + 5 + 1 = 45$

만약 $a_6 = 25$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 3 + 14 + 25 + 5 = 47$

또는 $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 70 + 14 + 25 + 5 > 70$

만약 $a_7 = 25$

$\sum_{k=4}^{7} a_k > 70$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 ( i ), ( ii )에 의하여

모든 $a_1$의 값의 합은 $125 + 14 = 139$

## 14-1 [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서 $a_{21} = (-1)^{20} \times a_{20} = a_{20}$

$a_{20} + a_{21} = 0$이므로 $a_{20} = a_{21} = 0$

조건 (나)에 의해

$a_{21} = -a_{18} - 18 = 0$

$a_{18} = -18 = -a_{15} - 15$

$a_{15} = 3 = -a_{12} - 12$

$a_{12} = -15 = -a_9 - 9$

$a_9 = 6 = -a_6 - 6$

$a_6 = -12 = -a_3 - 3$

$a_3 = 9$

$n$이 3의 배수가 아니면서 짝수이면

$n = 6k+2$, $n = 6k+4$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

조건 (가)에 의해

$a_{6k+3} = (-1)^{6k+2} \times a_{6k+2} = a_{6k+2}$

$a_{6k+5} = (-1)^{6k+4} \times a_{6k+4} = a_{6k+4}$

$n$이 3의 배수가 아니면서 홀수이면

$n = 6k+1$, $n = 6k+5$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

조건 (가)에 의해

$a_{6k+2} = (-1)^{6k+1} \times a_{6k+1} = -a_{6k+1}$

$a_{6k+6} = (-1)^{6k+5} \times a_{6k+5} = -a_{6k+5}$

$a_{6k+1} + a_{6k+2} + a_{6k+3} + a_{6k+4} + a_{6k+5} + a_{6k+6}$

$= a_{6k+1} - a_{6k+1} + a_{6k+3} + a_{6k+4} + a_{6k+5} - a_{6k+5}$

$= a_{6k+3} + a_{6k+4}$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$이므로

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$S_6 = a_3 + a_4$

$S_{6k+6} - S_{6k} = a_{6k+3} + a_{6k+4}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

$S_{18} = (S_{18} - S_{12}) + (S_{12} - S_6) + S_6$

$= (a_{15} + a_{16}) + (a_9 + a_{10}) + (a_3 + a_4)$

조건 (가)에 의해

$a_{18} = -a_{17} = -a_{16} = -18$, $a_{16} = 18$

$a_{12} = -a_{11} = -a_{10} = -15$, $a_{10} = 15$

$a_6 = -a_5 = -a_4 = -12$, $a_4 = 12$

따라서 $S_{18} = 63$

[참고]

$\{a_n\}$ : $-9$, 9, 9, 12, 12, $-12$, $-6$, 6, 6

15, 15, $-15$, $-3$, 3, 3, 18, 18

$-18$, $\cdots$

## 14-2 [정답] ④

[해설]

조건 (나)에 의해

$a_{21} = a_{18} - 18$이므로 $a_{21} + a_{18} = 2a_{18} - 18 = 0$, $a_{18} = 9$

$a_{18} = 9 = a_{15} - 15$

$a_{15} = 24 = a_{12} - 12$

$a_{12} = 36 = a_9 - 9$

$a_9 = 45 = a_6 - 6$

$a_6 = 51 = a_3 - 3$

$a_3 = 54$

$n$이 3의 배수가 아니면서 짝수이면

$n = 6k+2$, $n = 6k+4$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

조건 (가)에 의해

$a_{6k+3} = (-1)^{6k+2} \times a_{6k+2} = a_{6k+2}$

$a_{6k+5} = (-1)^{6k+4} \times a_{6k+4} = a_{6k+4}$

$n$이 3의 배수가 아니면서 홀수이면

$n = 6k+1$, $n = 6k+5$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

조건 (가)에 의해

$a_{6k+2} = (-1)^{6k+1} \times a_{6k+1} = -a_{6k+1}$

$a_{6k+6}=(-1)^{6k+5}\times a_{6k+5}=-a_{6k+5}$

$a_{6k+1}+a_{6k+2}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}+a_{6k+6}$

$=a_{6k+1}-a_{6k+1}+a_{6k+3}+a_{6k+4}+a_{6k+5}-a_{6k+5}$

$=a_{6k+3}+a_{6k+4}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을

$S_n$이라 하면

$S_6=a_3+a_4$

$S_{6k+6}-S_{6k}=a_{6k+3}+a_{6k+4}(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$S_{18}=(S_{18}-S_{12})+(S_{12}-S_6)+S_6$

$=(a_{15}+a_{16})+(a_9+a_{10})+(a_3+a_4)$

조건 (가)에 의해

$a_{18}=-a_{17}=-a_{16}=9,\ a_{16}=-9$

$a_{12}=-a_{11}=-a_{10}=36,\ a_{10}=-36$

$a_6=-a_5=-a_4=51,\ a_4=-51$

따라서 $S_{18}=27$

## 15-1 [정답] ②

[해설]

조건 (나)에서 $a_3>a_5$이므로 $a_3$이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) $a_3$이 4의 배수인 경우

$a_3=4k$ ($k$는 자연수)라 하면 $a_4=2k+6$

$k$가 홀수일 때 $a_4$는 4의 배수이고

$a_5=k+11,\ a_4+a_5=3k+17$이므로

$50<3k+17<60,\ a_3>a_5$에서 $k>\dfrac{11}{3}$

$k$는 홀수이므로 $k=13$이고 $a_3=52$

$k$가 짝수일 때 $a_4$는 4의 배수가 아니고

$a_5=2k+14,\ a_4+a_5=4k+20$이므로

$50<4k+20<60,\ a_3>a_5$에서 $k>7$

$k$는 짝수이므로 $k=8$이고 $a_3=32$

따라서 $a_3=52$ 또는 $a_3=32$

$a_3=52$인 경우 $a_2=96$이고

$a_1=94$ 또는 $a_1=188$

$a_3=32$인 경우 $a_2=56$이고

$a_1=54$ 또는 $a_1=108$

(ⅱ) $a_3$이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3=4k-1$ 또는 $a_3=4k-3$ ($k$는 자연수)일 때

$a_3,\ a_4,\ a_5$는 모두 홀수이고 $a_5=a_4+8=a_3+14>a_3$이므로

조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3=4k-2$ ($k$는 자연수)일 때 $a_4=4k+4,\ a_5=2k+10$이고

$a_4+a_5=6k+14$이므로 $50<6k+14<60 a_3>a_5$에서 $k>6$,

이때 $k=7$이므로 $a_3=26$

따라서 $a_2=22$ 또는 $a_2=44$이다.

$a_2=22$인 경우 $a_1=40$

$a_2=44$인 경우 $a_1=42$ 또는 $a_1=84$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=188,\ m=40$이고 $M+m=228$

## 15-2 [정답] 100

[해설]

조건 (나)에서 $a_3\le a_5$이므로 $a_3$이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) $a_3$이 4의 배수인 경우

$a_3=4k$ ($k$는 자연수)라 하면 $a_4=2k-6$

$k$가 홀수일 때 $a_4$는 4의 배수이고

$a_5=k-11,\ a_4+a_5=3k-17$이므로

$20<3k-17<30,\ a_3\le a_5$에서 $3k+11\le 0$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.

$k$가 짝수일 때 $a_4$는 4의 배수가 아니고

$a_5=2k+12,\ a_4+a_5=4k+6$이므로

$20<4k+6<30,\ a_3\le a_5$에서 $k\le 6$

$k$는 짝수이므로 $k=4$이고 $a_3=16$

따라서 $a_2=6$ 또는 $a_2=40$ 이고

$a_2=6$인 경우

$a_1=16$

$a_2=40$인 경우

$a_1=84$ 또는 $a_1=34$

(ⅱ) $a_3$이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3=4k-1$ 또는 $a_3=4k-3$ ($k$는 자연수)일 때

$a_3,\ a_4,\ a_5$는 모두 홀수이고

$a_5=a_4+18=a_3+32>30$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

$a_3=4k-2$ ($k$는 자연수)일 때 $a_4=4k+12,\ a_5=2k-2$이고

$a_4+a_5=6k+10$이므로 $20<6k+10<30$

$a_3\le a_5$에서 $4k-2\le 2k-2,\ k\le 0$이므로 모든 항이 자연수라는 가정에 모순된다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M=84,\ m=16$이고 $M+m=100$

## 16-1 [정답] ③

[해설]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_6+a_7=3$이다.

자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=1$이면 $2^{a_k}=1$인 홀수 $a_k$는 존재하지 않는다. $a_{k+1}=1$일 때 $a_k$의 값이 짝수이면

$\dfrac{a_k}{2}=1,\quad a_k=2$

따라서 자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=1$이면 $a_k=2$이다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이므로

$a_6=1,\ a_7=2$ 또는 $a_6=2,\ a_7=1$

(ⅰ) $a_6=1,\ a_7=2$일 때

$a_5=2$

(1) $a_4$가 홀수일 때

$2^{a_4}=2$에서 $\quad a_4=1,\ a_3=2$

(a) $a_2$가 홀수일 때

$2^{a_2}=2$에서 $\quad a_2=1$

$\therefore\ a_1=2$

(b) $a_2$가 짝수일 때

$\frac{a_2}{2}=2$에서 $\quad a_2=4 \quad\cdots\cdots$ ㉠

$2^{a_1}=4$인 홀수 $a_1$은 존재하지 않는다.

$a_1$이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=4 \quad \therefore\ a_1=8$

$\cdots\cdots$ ㉡

(2) $a_4$가 짝수일 때

$\frac{a_4}{2}=2$에서 $\quad a_4=4$

㉡에서 $a_2=4$일 때 $a_1=8$이므로 같은 방법으로 하면 $a_3$의 값은

$a_3=8$

(a) $a_2$가 홀수일 때

$2^{a_2}=8$에서 $\quad a_2=3$

$2^{a_1}=3$인 홀수 $a_1$은 존재하지 않는다.

$a_1$이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=3 \quad \therefore\ a_1=6$

(b) $a_2$가 짝수일 때

$\frac{a_2}{2}=8$에서 $\quad a_2=16 \quad\cdots\cdots$ ㉢

$2^{a_1}=16$인 홀수 $a_1$은 존재하지 않는다.

$a_1$이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=16 \quad \therefore\ a_1=32$

(ⅱ) $a_6=2,\ a_7=1$일 때

㉠에서 $a_3=2$일 때 $a_2=1$ 또는 $a_2=4$이므로 같은 방법으로 하면 $a_5$의 값은

$a_5=1$ 또는 $a_5=4$

(1) $a_5=1$일 때

$a_4=2$

㉠에서 $a_3=2$일 때 $a_2=1$ 또는 $a_2=4$이므로 같은 방법으로 하면 $a_3$의 값은

$a_3=1$ 또는 $a_3=4$

$a_3=1$이면 $\quad a_2=2$

㉡에 의하여 $a_3=4$이면 $\quad a_2=8$

(a) $a_2=2$일 때

㉠에 의하여 $\quad a_1=1$ 또는 $a_1=4$

(b) $a_2=8$일 때

㉢에서 $a_3=8$일 때 $a_2=3$ 또는 $a_2=16$이므로 같은 방법으로 하면

$a_1=3$ 또는 $a_1=16$

(2) $a_5=4$일 때

㉡에 의하여 $\quad a_4=8$

$a_3$이 홀수이면 $2^{a_3}=8$에서 $\quad a_3=3$

$a_3$이 짝수이면 $\frac{a_3}{2}=8$에서 $\quad a_3=16$

$2^{a_2}=3$ 또는 $2^{a_2}=16$인 홀수 $a_2$는 존재하지 않는다.

$a_3=3$에서 $a_2$의 값이 짝수이면 $\frac{a_2}{2}=3$에서

$a_2=6$

$a_3=16$에서 $a_2$의 값이 짝수이면 $\frac{a_2}{2}=16$에서

$a_2=32$

(a) $a_2=6$일 때

$2^{a_1}=6$인 홀수 $a_1$은 존재하지 않는다.

$a_1$이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=6 \quad \therefore\ a_1=12$

(b) $a_2=32$일 때

$a_1$이 홀수이면 $\quad 2^{a_1}=32 \quad \therefore\ a_1=5$

$a_1$이 짝수이면 $\quad \frac{a_1}{2}=32 \quad \therefore\ a_1=64$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_1$의 값은

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 16,\ 32,\ 64$

이다. 따라서 모든 $a_1$의 값의 합은 153이다.

## 16-2 [정답] 149

[해설]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에서 $a_6+a_7=6$이다.

자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=1$이면 $4^{a_k}=1$인 홀수 $a_k$는 존재하지 않는다. $a_{k+1}=1$일 때 $a_k$의 값이 짝수이면

$\frac{a_k}{2}=1,\quad a_k=2$

자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=2$이면 $4^{a_k}=2$인 홀수 $a_k$는 존재하지 않는다. $a_{k+1}=2$일 때 $a_k$의 값이 짝수이면

$\frac{a_k}{2}=2,\quad a_k=4$

따라서 자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=2$이면 $a_k=4$이다.

자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=4$이면 $4^{a_k}=4$인 홀수 $a_k=1$

따라서 자연수 $k$에 대하여 $a_{k+1}=4$이면 $a_k=1$이다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이므로

$a_6=4,\ a_7=2$

$a_6=4,\ a_7=2$일 때

(1) $a_5$가 홀수일 때

$4^{a_5}=4$에서 $\quad a_5=1,\ a_4=2$

(a) $a_3$이 홀수일 때

$4^{a_3}=2$에서 $a_3$은 존재하지 않는다.

(b) $a_3$이 짝수일 때

$\frac{a_3}{2}=2$에서 $\quad a_3=4$

㉠ $a_3=4$를 만족하는 짝수 $a_2$

$\frac{a_2}{2}=4,\ a_2=8$이다.

㉡ $a_3=4$를 만족하는 홀수 $a_2$

$a_2=1,\ a_1=2$

(2) $a_5$가 짝수일 때

$\frac{a_5}{2}=4$에서 $a_5=8$

(a) $a_4$가 홀수일 때

$4^{a_4}=8$에서 홀수 $a_4$는 존재하지 않는다.

(b) $a_4$이 짝수이면 $\frac{a_4}{2}=8$ $\therefore\ a_4=16$

$a_4=16$

$4^{a_3}=16$인 홀수 $a_3$은 존재하지 않는다.

$a_3$이 짝수이면 $\frac{a_3}{2}=16$ $\therefore\ a_3=32$

(3) $a_3=32$일 때,

(a) $a_2$가 홀수일 때

$4^{a_2}=32$에서 홀수 $a_2$는 존재하지 않는다.

(b) $a_2$가 짝수이면 $\frac{a_2}{2}=32$ $\therefore\ a_2=64$

(4) $a_2=64$일 때,

(a) $a_1$이 홀수일 때

$4^{a_1}=64$에서 홀수 $a_1=3$

(b) $a_1$이 짝수이면 $\frac{a_1}{2}=64$ $\therefore\ a_1=128$

따라서 $a_1$의 값은

$2,\ 3,\ 16,\ 128$

이다. 따라서 모든 $a_1$의 값의 합은 $149$이다.

## 17-1 [정답] ④

[해설]

조건 (나)에서

$a_n$이 홀수이고 $a_{n+1}$이 홀수이면 $a_{n+2}$는 짝수,

$a_n$이 홀수이고 $a_{n+1}$이 짝수이면 $a_{n+2}$는 홀수,

$a_n$이 짝수이고 $a_{n+1}$이 홀수이면 $a_{n+2}$는 홀수,

$a_n$이 짝수이고 $a_{n+1}$이 짝수이면 $a_{n+2}$는 짝수이다.

조건 (가)에서 $a_5$가 홀수이므로

$a_3$과 $a_4$ 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이어야 한다.

( i ) $a_3$이 홀수이고 $a_4$가 짝수인 경우

$a_2$는 홀수이고 $a_1$은 짝수이다.

$a_1=2k,\ a_2=2l-1$ ($k,\ l$은 자연수)라 하면

조건 (나)에 의하여

$a_1\times a_2$는 짝수이므로 $a_3=2k+2l-3$,

$a_2\times a_3$은 홀수이므로 $a_4=2k+4l-4$,

$a_3\times a_4$는 짝수이므로 $a_5=4k+6l-9$

$4k+6l-9=63$에서 $a_1=2k=36-3l$

이므로 가능한 $a_1$의 값은 $6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30$이다.

( ii ) $a_3$이 짝수이고 $a_4$가 홀수인 경우

$a_2$는 홀수이고 $a_1$도 홀수이다.

$a_1=2p-1,\ a_2=2q-1$($p,\ q$는 자연수 )라 하면 조건 (나)에 의하여

$a_1\times a_2$는 홀수이므로 $a_3=2p+2q-2$,

$a_2\times a_3$은 짝수이므로 $a_4=2p+4q-5$,

$a_3\times a_4$는 짝수이므로 $a_5=4p+6q-9$

$4p+6q-9=63$에서 $a_1=2p-1=35-3q$

이므로 가능한 $a_1$의 값은 $5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29$이다.

( i ), ( ii )에 의하여 $a_1$의 최댓값은 $30$, 최솟값은 $5$

따라서 $M-m=30-5=25$

## 17-2 [정답] ⑤

[해설]

조건 (나)에서

$a_n$이 홀수이고 $a_{n+1}$이 홀수이면 $a_{n+2}$는 짝수,

$a_n$이 홀수이고 $a_{n+1}$이 짝수이면 $a_{n+2}$는 홀수,

$a_n$이 짝수이고 $a_{n+1}$이 홀수이면 $a_{n+2}$는 홀수,

$a_n$이 짝수이고 $a_{n+1}$이 짝수이면 $a_{n+2}$는 짝수이다.

조건 (가)에서 $a_5$가 홀수이므로

$a_3$과 $a_4$ 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이어야 한다.

( i ) $a_3$이 홀수이고 $a_4$가 짝수인 경우

$a_2$는 홀수이고 $a_1$은 짝수이다.

$a_1=2k,\ a_2=2l-1$ ($k,\ l$은 자연수)라 하면

조건 (나)에 의하여

$a_1\times a_2$는 짝수이므로 $a_3=2k+2l-3$,

$a_2\times a_3$은 홀수이므로 $a_4=2k+4l-4$,

$a_3\times a_4$는 짝수이므로 $a_5=4k+6l-9$

$4k+6l-9=45$에서 $a_1=2k=27-3l$

이므로 가능한 $a_1$의 값은 $6,\ 12,\ 18,\ 24$ 이다.

( ii ) $a_3$이 짝수이고 $a_4$가 홀수인 경우

$a_2$는 홀수이고 $a_1$도 홀수이다.

$a_1=2p-1,\ a_2=2q-1$($p,\ q$는 자연수 )라 하면 조건 (나)에 의하여

$a_1\times a_2$는 홀수이므로 $a_3=2p+2q-2$,

$a_2\times a_3$은 짝수이므로 $a_4=2p+4q-5$,

$a_3\times a_4$는 짝수이므로 $a_5=4p+6q-9$

$4p+6q-9=45$에서 $a_1=2p-1=26-3q$

이므로 가능한 $a_1$의 값은 $5,\ 11,\ 17,\ 23$이다.

( i ), ( ii )에 의하여 $a_1$의 최댓값은 $24$, 최솟값은 $5$

따라서 $M+m=24+5=29$

## 18-1 [정답] ④

[해설]

$a_n$이 자연수라 하자. 자연수 $k$에 대하여

$a_n=3k-2$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-2)^2+5}{3}=\frac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$,

$a_n=3k-1$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-1)^2+5}{3}=\frac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$,

$a_n=3k$이면 $a_{n+1}=\frac{3k}{3}=k$

이므로 $a_n$이 자연수이면 $a_{n+1}$도 자연수이다.

$a_1$이 자연수이므로 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n$은 자연수이다.

…… ㉠

$a_4$가 3의 배수이면 $a_5=\frac{a_4}{3}$이므로

$a_4+a_5=5$에서 $a_4+\frac{a_4}{3}=5$, $a_4=\frac{15}{4}$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_4$는 3의 배수가 아니다.

$a_5=\frac{{a_4}^2+5}{3}$이므로 $a_4+a_5=5$에서

$a_4+\frac{{a_4}^2+5}{3}=5$

${a_4}^2+3a_4-10=(a_4+5)(a_4-2)=0$

㉠에 의하여 $a_4=2$

(ⅰ) $a_3$이 3의 배수인 경우

$a_4=\frac{a_3}{3}=2$이므로 $a_3=6$

$a_2$의 값을 구하면

ⓐ $a_2$가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{a_2}{3}=6$이므로 $a_2=18$

ⓑ $a_2$가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\frac{{a_2}^2+5}{3}=6$이므로 ${a_2}^2=13$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=18$

$a_1$의 값을 구하면

ⓐ $a_1$이 3의 배수인 경우

$a_2=\frac{a_1}{3}=18$이므로 $a_1=54$

ⓑ $a_1$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\frac{a_1^2+5}{3}=18$이므로 ${a_1}^2=49$

㉠에 의하여 $a_1=7$

(ⅱ) $a_3$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=\frac{{a_3}^2+5}{3}=2$이므로 ${a_3}^2=1$

㉠에 의하여 $a_3=1$

$a_2$의 값을 구하면

ⓐ $a_2$가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{a_2}{3}=1$이므로 $a_2=3$

ⓑ $a_2$가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\frac{{a_2}^2+5}{3}=1$이므로 ${a_2}^2=-2$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=3$

$a_1$의 값을 구하면

ⓐ $a_1$이 3의 배수인 경우

$a_2=\frac{a_1}{3}=3$이므로 $a_1=9$

ⓑ $a_1$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\frac{a_1^2+5}{3}=3$이므로 $a_1^2=4$

㉠에 의하여 $a_1=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 $a_1$의 값의 합은

$54+7+9+2=72$

## 18-2 [정답] ④

[해설]

$a_n$이 자연수라 하자. 자연수 $k$에 대하여

$a_n=3k-2$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-2)^2+2}{3}=\frac{9k^2-12k+6}{3}=3k^2-4k+2$,

$a_n=3k-1$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-1)^2+2}{3}=\frac{9k^2-6k+3}{3}=3k^2-2k+1$,

$a_n=3k$이면 $a_{n+1}=\frac{3k}{3}=k$

이므로 $a_n$이 자연수이면 $a_{n+1}$도 자연수이다.

$a_1$이 자연수이므로 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n$은 자연수이다.

…… ㉠

$a_4$는 3의 배수가 아니면

$a_5=\frac{{a_4}^2+2}{3}$이므로 $a_4+a_5=8$에서

$a_4+\frac{{a_4}^2+2}{3}=8$

${a_4}^2+3a_4-22=0$ 이므로 자연수 $a_4$가 존재하지 않는다.

$a_4$가 3의 배수이면 $a_5=\frac{a_4}{3}$이므로

$a_4+a_5=8$에서 $a_4+\frac{a_4}{3}=8$, $a_4=6$

따라서 $a_4=6$

(ⅰ) $a_3$이 3의 배수인 경우

$a_4=\frac{a_3}{3}=6$이므로 $a_3=18$

$a_2$의 값을 구하면

ⓐ $a_2$가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{a_2}{3}=18$이므로 $a_2=54$

ⓑ $a_2$가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\dfrac{{a_2}^2+2}{3}=18$이므로 ${a_2}^2=52$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=54$

$a_1$의 값을 구하면

ⓐ $a_1$이 3의 배수인 경우

$a_2=\dfrac{a_1}{3}=54$이므로 $a_1=162$

ⓑ $a_1$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\dfrac{a_1^2+2}{3}=54$이므로 ${a_1}^2=160$

㉠에 의하여 ${a_1}^2=160$을 만족시키는 자연수 $a_1$은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_3$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=\dfrac{{a_3}^2+2}{3}=6$이므로 ${a_3}^2=16$

㉠에 의하여 $a_3=4$

$a_2$의 값을 구하면

ⓐ $a_2$가 3의 배수인 경우

$a_3=\dfrac{a_2}{3}=4$이므로 $a_2=12$

ⓑ $a_2$가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\dfrac{{a_2}^2+2}{3}=4$이므로 ${a_2}^2=10$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=12$

$a_1$의 값을 구하면

ⓐ $a_1$이 3의 배수인 경우

$a_2=\dfrac{a_1}{3}=12$이므로 $a_1=36$

ⓑ $a_1$이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\dfrac{a_1^2+2}{3}=12$이므로 $a_1^2=34$가 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 $a_1$의 값의 합은

$162+36=198$

## 19-1 [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 자연수 $n$에 대하여

$a_n<1$이면 $a_{n+1}=2^{n-2}>0$이고

$a_n\ge 1$이면 $a_{n+1}=\log_2 a_n\ge 0$이므로

2 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\ge 0$이다.

조건 (가), (나)에서

$a_5$, $a_6$의 값을 구하면

(ⅰ) $0\le a_5<1$일 때

$a_6=2^{5-2}$에서 $a_5+a_6\ge 8$이므로

$a_5+a_6=1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_5\ge 1$일 때

$a_6=\log_2 a_5\ge 0$에서 $a_5+a_6\ge 1$

$a_5+a_6=1$을 만족시키려면

$a_5=1$, $a_6=0$ 그러므로

$a_5=1$, $a_6=0$

$a_4$의 값을 구하면

(ⅰ) $0\le a_4<1$일 때 $a_5=2^{4-2}=4$이므로

$a_5=1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4\ge 1$일 때 $a_5=\log_2 a_4=1$이므로

$a_4=2$ 그러므로 $a_4=2$

$a_1$, $a_2$, $a_3$의 값을 구하면

(ⅰ) $0\le a_3<1$일 때

$a_4=2^{3-2}=2$이므로 $0\le a_3<1$

(a) $0\le a_2<1$일 때 $a_3=2^{2-2}=1$이므로 $0\le a_3<1$을 만족시키지 않는다.

(b) $a_2\ge 1$일 때 $a_3=\log_2 a_2$에서 $1\le a_2<2$,

$a_1<2$이면 $a_2=2^{1-2}=\dfrac{1}{2}$이므로 $1\le a_2<2$를 만족시키지 않는다.

$a_1\ge 1$이면 $a_2=\log_2 a_1$에서 $2\le a_1<4$

(ⅱ) $a_3\ge 1$일 때

$a_4=\log_2 a_3$에서 $a_3=2^2=4$

(a) $0\le a_2<1$일 때

$a_3=2^{2-2}=1$이므로 $a_3=4$를 만족시키지 않는다.

(b) $a_2\ge 1$일 때

$a_3=\log_2 a_2$에서 $a_2=2^4=16$

$a_1<1$이면 $a_2=2^{1-2}=\dfrac{1}{2}$이므로

$a_2=16$을 만족시키지 않는다.

$a_1\ge 1$이면 $a_2=\log_2 a_1$에서 $a_1=2^{16}$

따라서

$a_1$의 값은 $2\le a_1<4$ 또는 $a_1=2^{16}$이므로

$M=2^{16}$, $m=2$이고 $\log_2\dfrac{M}{m}=\log_2 2^{15}$

$=15$

## 19-2 [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 자연수 $n$에 대하여

$a_n<1$이면 $a_{n+1}=3^{n-2}>0$이고

$a_n\ge 1$이면 $a_{n+1}=\log_3 a_n\ge 0$이므로

2 이상의 모든 자연수 $n$에 대하여 $a_n\ge 0$이다.

조건 (가), (나)에서
$a_4$, $a_5$의 값을 구하면
( i ) $0 \le a_4 < 1$일 때
$a_5 = 3^{4-2}$에서 $a_4 + a_5 \ge 9$이므로
$a_4 + a_5 = 1$을 만족시키지 않는다.
( ii ) $a_4 \ge 1$일 때
$a_5 = \log_3 a_4 \ge 0$에서 $a_4 + a_5 \ge 1$
$a_4 + a_5 = 1$을 만족시키려면
$a_4 = 1$, $a_5 = 0$
$a_3$의 값을 구하면
(1) $0 \le a_3 < 1$일 때 $a_4 = 3^{3-2} = 3$이므로
$a_4 = 1$을 만족시키지 않는다.
(2) $a_3 \ge 1$일 때 $a_4 = \log_3 a_3 = 1$이므로
$a_3 = 3$
$a_1$, $a_2$ 의 값을 구하면
$0 \le a_2 < 1$일 때
$a_3 = 3^{2-2} = 1$이므로 $a_3 = 3$을 만족시키지 않는다.
$a_2 \ge 1$일 때
$a_3 = \log_3 a_2 = 3$에서 $a_2 = 3^3 = 27$
(a) $0 \le a_1 < 1$일 때
$a_2 = 3^{1-2} = \frac{1}{3}$이므로 $a_2 = 27$를
만족시키지 않는다.
(b) $a_1 \ge 1$일 때
$a_2 = \log_3 a_1$에서 $a_1 = 3^{27}$

따라서 $a_1 = 3^{27}$, $m = 3^{27}$
$\log_3 m = 27$

## 20-1 [정답] ③

[해설]
$a_4 \le 4$이면 $a_5 = 10 - a_4 = 5$에서 $a_4 = 5$이므로 $a_4 \le 4$를
만족시키지 않는다. 그러므로 $a_4 > 4$이고 $a_4 = a_5$에서
$a_4 = 5$이다.
$a_3 > 3$일 때, $a_3 = a_4$에서 $a_3 = 5$이고
$a_3 \le 3$일 때, $a_4 = 7 - a_3 = 5$에서 $a_3 = 2$이다.
( i ) $a_3 = 5$인 경우
① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 5$이다.
$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2$에서 $a_1 = 5$이고
$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 5$에서 $a_1 = -4$이다.
② $a_2 \le 2$이면 $a_3 = 4 - a_2 = 5$에서 $a_2 = -1$이다.
$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2 = -1$이므로 $a_1 > 1$을 만족시키지
않는다.
$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = -1$에서 $a_1 = 2$이므로
$a_1 \le 1$을 만족시키지 않는다.
( ii ) $a_3 = 2$인 경우
① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 2$이므로 $a_2 > 2$를
만족시키지 않는다.
② $a_2 \le 2$이면 $a_3 = 4 - a_2 = 2$에서 $a_2 = 2$이다.
$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2$에서 $a_1 = 2$이고
$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 2$에서 $a_1 = -1$이다.
( i ), ( ii )에서 $a_1 = 5$ 또는 $a_1 = -4$ 또는 $a_1 = 2$
또는 $a_1 = -1$이다. 따라서 구하는 모든 $a_1$의 값의 곱은
$5 \times (-4) \times 2 \times (-1) = 40$

## 20-2 [정답] ③

[해설]
$a_4 \le 4$이면 $a_5 = 13 - a_4 = 8$에서 $a_4 = 5$이므로 $a_4 \le 4$를
만족시키지 않는다. 그러므로 $a_4 > 4$이고 $a_4 = a_5$에서
$a_4 = 8$이다.
$a_3 > 3$일 때, $a_3 = a_4$에서 $a_3 = 8$이고
$a_3 \le 3$일 때, $a_4 = 9 - a_3 = 8$에서 $a_3 = 1$이다.
( i ) $a_3 = 8$인 경우
① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 8$이다.
$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2$에서 $a_1 = 8$이고
$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 8$에서 $a_1 = -7$이다.
② $a_2 \le 2$이면 $a_3 = 5 - a_2 = 8$에서 $a_2 = -3$이다.
$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2 = -3$이므로 $a_1 > 1$을 만족시키지
않는다.
$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = -3$에서 $a_1 = 4$이므로
$a_1 \le 1$을 만족시키지 않는다.
( ii ) $a_3 = 1$인 경우
① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 1$이므로 $a_2 > 2$를
만족시키지 않는다.
② $a_2 \le 2$이면 $a_3 = 5 - a_2 = 1$에서 $a_2 = 4$이므로 $a_2 \le 2$를
만족시키지 않는다.
( i ), ( ii )에서 $a_1 = 8$ 또는 $a_1 = -7$
따라서 구하는 모든 $a_1$의 값의 곱은 $8 \times (-7) = -56$