2024년

공부 양을 미친듯이 줄여주는

Light

200제

미적분 기말

인피니트 수학연구소

GR831 수학연구소

2024년 1학기 기말고사

Infinite 수학연구소

목 차 Contents

MEMO

01 도함수의 활용

유형 1 접선의 방정식

1. 곡선 $y=4\sin(\cos x)-2\pi$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ -2\pi\right)$ 에서의 접선이 점 $(-3,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.

2. 함수 $f(x)=(x^2-3x-3)e^x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 $m(a)$라 할 때, $m(a)<0$을 만족시키는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 매개변수 $t\,(t>1)$로 나타낸 곡선 $x=t^2-t$, $y=t^2+2t$에 대하여 $t=2$에 대응하는 점에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

4. 곡선 $x^2-xy-2y^2=a^2\ (a>0)$이 x축과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 이 곡선 위의 점 P, Q에서의 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리가 4일 때, 상수 a의 값은?
(단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작다.)

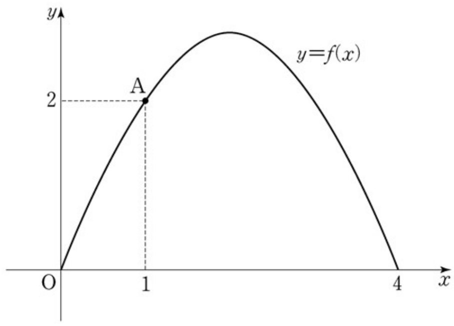
① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

5. 두 곡선 $y=\frac{k}{x}$, $y=\ln x$의 교점에서 각 곡선에 접하는 직선이 일치할 때, 상수 k의 값은?

① $-\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $-e$
④ e ⑤ -1

6. 양수 k에 대하여 두 곡선 $y=ke^{x-1}+1$, $y=x^2-3x+4$가 한 점 P에서 만나고, 점 P에서 두 곡선에 접하는 두 접선이 서로 수직일 때, k의 값을 구하시오.

7. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{A}(1, 2)$를 지난다.



일차함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은?

① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$
④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

8. 일차함수 $f(x)=ax+b$가 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$\ln x+a+1\le f(x)\le e^{x-1}+a$$

를 만족시킬 때, $f'(1)+f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

47. 함수 $f(x)=x-x\ln x\,(x>0)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 극값을 가진다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ. ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

48. 함수 $f(x)=x^2-3x+\ln x$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 -2를 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.
ㄷ. 열린구간 $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 점 P 이외의 점에서는 만나지 않을 때, 실수 t의 최댓값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

50. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$이고, 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g\left(\frac{3}{2}\right)+\lim_{t\to\frac{3}{2}}g(t)=3$$

일 때, 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

유형 5 방정식, 부등식에의 활용

51. $x \geq 0$에서 x에 대한 방정식 $2\sqrt{1+x^2}=a(1+x)$가 실근을 갖도록 하는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

52. 방정식 $(x-4)^2=4e^{x-6}$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

53. 방정식 $(x+2)^2e^{-x}=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? (단, $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

54. 함수 $f(x)=-xe^x$의 그래프에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x=-1$에서 극댓값 $\frac{1}{e}$을 갖는다.

ㄴ. 변곡점의 좌표는 $\left(-2, \frac{2}{e^2}\right)$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=\frac{1}{3}$의 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

70. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=4\sqrt{2}t,\ \ y=t^2+\frac{1}{t}$$

이다. 점 P의 속력이 최소일 때, 점 P의 가속도는 $(a,\ b)$이다. a^2+b^2의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

71. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=3t+1\ ,\ \ y=t-\frac{1}{3}t^3$$

이다. 점 P의 속도의 크기가 3일 때의 가속도의 크기는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

72. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=-3\sin 2t$, $y=3\cos 2t$일 때, 시각 t에서 점 P의 가속도의 크기는?

① 1 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

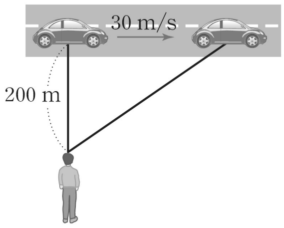
73. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x=\cos t+\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t,\ \ y=\sin t-\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t$$

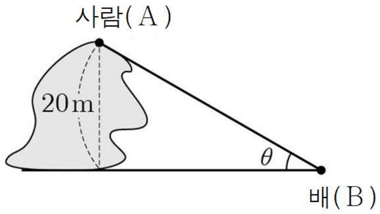
일 때, 점 P의 가속도의 크기는 $t=a\pi$에서 최솟값 m을 갖는다. $a+m$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

74. 다음 그림과 같이 자동차가 직선 도로 위를 $30\,\mathrm{m/s}$ 의 속도로 달리고 있다. 도로에서 $200\,\mathrm{m}$ 떨어진 곳에서 자동차를 바라보고 있는 관찰자의 정면을 통과하고 2 초가 지난 후에 자동차가 관찰자로부터 멀어지는 속도를 구하시오.



75. 높이가 $20\mathrm{m}$인 해변의 절벽 맨 꼭대기에 한 사람(A)가 $10\mathrm{m/sec}$의 속도로 다가오는 배(B)를 바라보고 있다. 배에서 이 사람을 바라보는 각을 θ라 하자. 배가 절벽으로부터 떨어진 거리가 $15\mathrm{m}$가 되는 순간의 시간에 대한 각 θ의 변화율은? (단, 배와 절벽 사이의 거리는 사람(A)지점에서의 수선의 발과 배(B) 사이의 거리로 정의한다.)



① $\frac{8}{25}$　② $\frac{12}{5}$　③ $-\frac{8}{25}$
④ $-\frac{12}{5}$　⑤ $-\frac{20}{3}$

MEMO

MEMO

02 부정적분

유형 1 부정적분

76. $x > 0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (0 < x < 1) \\ 3\sqrt{x} & (x > 1) \end{cases}$$

일 때, $f(e^2) - f\left(\dfrac{1}{e}\right)$의 값은?

① $2e^3 - 1$　② $2e^3$　③ $2e^3 + 1$
④ $3e^3 - 1$　⑤ $3e^3 + 1$

77. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0) \\ 1 + \sin x & (x > 0) \end{cases}$$

이다. $f(\pi) = \pi + 2$일 때, $f(-\ln 4)$의 값은?

① $-\dfrac{3}{4}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $-\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{2}$

78. 함수 $f(x) = x\ln x - x$의 도함수를 $f'(x)$라 하고, 함수 $f'(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자.

$$\int g(x-1)dx = h(x) + C$$

이고 $h(1) = 1$일 때, $h(2)$의 값을 구하시오.
(단, C는 적분상수)

79. 다음 조건을 모두 만족시키는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\ln(f(1) + g(1))$의 값을 구하시오.

(가) $f'(x) + g'(x) = e^x$, $f'(x) - g'(x) = e^{-x}$
(나) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$

80. $f(0)=0$인 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$e^x\{f(x)+f'(x)\}=1+3x^2$$

을 만족시킨다. $f(3)=\frac{k}{e^3}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

81. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $\frac{f(x)}{x}+f'(x)=\frac{x-1}{x\sqrt{x}+x}$을 만족시킨다. $f(1)=-\frac{1}{3}$일 때, 구간 $[1, 9]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

82. $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x},\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

을 만족시킨다. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$인 상수 α에 대하여 $f(\alpha)$의 값은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

83. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=\sec^2 x\csc^2 x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

92. 다음 부정적분을 구하시오.

(1) $\int xe^{x}dx$

(2) $\int x\ln xdx$

93. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(2x+1)\ln x$이고 $f(1)=\frac{1}{2}$일 때, $f(e)$의 값은?

① $\frac{1}{2}e^{2}$ ② $\frac{1}{2}e^{2}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}e^{2}+1$

④ $\frac{1}{2}e^{2}+\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}e^{2}+2$

MEMO

MEMO

03 정적분

유형 1 정적분

94. $\int_0^{\pi} |\sin 5x|\,dx$의 값은?

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ 2
④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

95. $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 함수

$$f(x) = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \cdots$$

에 대하여 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ 를 구하시오.

96. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = m + n\sqrt{2}$ 일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.)

97. $\int_0^{1} \frac{4x}{x^2+1}\,dx$의 값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$
④ $3\ln 2$ ⑤ $2\ln 3$

98. $\displaystyle\int_0^a \frac{|x-1|}{x^2-2x+2}dx=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $a>1$)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

99. 정적분 $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$의 값은?

① $\frac{1}{2}\ln 6$ ② $\ln 6$ ③ $\frac{1}{2}\ln 13$
④ $\ln 13$ ⑤ $\frac{1}{2}\ln 15$

100. $\displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^{1} \sqrt{3x-2}\,dx$ 의 값은?

① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{8}{45}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{14}{45}$

101. 양수 a에 대하여 $\displaystyle\int_0^a 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{4}{3}$ 일 때, $(a^2+1)^3$ 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

127. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 3,\ \int_{-1}^{1} f'(x)dx = 10$$

일 때, $\int_{-1}^{1} x^2 f'(x)dx$의 값을 구하시오.

128. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx = 10,$$

$$\int_{0}^{2}\{f(x)+f(-x)\}dx = 15$$

를 만족시킬 때, $\int_{-1}^{1}\{f(x)+f(-x)\}dx$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6
④ -8 ⑤ -10

129. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족하고 $f(3)=2$일 때,
$\int_{-3}^{3}(4+5\sin x)f'(x)\,dx$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

130. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수$f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+f(-x) = \cos\frac{\pi x}{8}$$

를 만족시킨다. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{k}{\pi}$일 때, k^2의 값을 구하시오

131. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)+f(x)=3$이다.
> (나) $\int_{1}^{2} f(x)dx=\frac{9}{2}$

$\int_{0}^{1} xf'(x)dx$의 값을 구하시오.

132. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(3)=15,\quad \int_{1}^{3}(x-1)f'(x)dx=25$$

일 때, $\int_{1}^{9}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

133. 자연수 n에 대하여 $a_n=\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^n}{x}dx$라 할 때, $\sum_{n=1}^{28}a_n a_{n+1}$의 값은?

① $\frac{13}{30}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{17}{30}$

유형 2 정적분과 함수

134. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 식을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

$$f(x)=x\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$$

135. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\int_0^1 f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x)dx$의 값은?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$
④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

136. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가

$$f(x)=(\ln x)^2+\int_1^e \frac{f(t)}{2t}dt$$

를 만족시킬 때, $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

137. 함수 $f(x)=2^{x}(2^{x}+1)$에 대하여

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^{2}-4}\displaystyle\int_{2}^{x}f(t)\,dt$의 값을 구하시오.

138. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$이

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^{3}-1}\int_{x-2}^{x}f(t)dt=4\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

을 만족시킨다. $f(\ln 2)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

139. 함수 $f(x)=\displaystyle\int_{a}^{x}e^{t^{2}}dt$에 대하여 $\displaystyle\int_{f(a)}^{1}2xf'(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

140. $x>1$에서 정의된 함수 $f(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{x}\frac{1}{\ln t}dt$에 대하여

$\dfrac{f(e)}{e}+\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{f(x)}{x^{2}}dx$의 값은?

① $\frac{1}{8}\ln 2$ ② $\frac{1}{6}\ln 2$ ③ $\frac{1}{4}\ln 2$
④ $\frac{1}{2}\ln 2$ ⑤ $\ln 2$

04 정적분의 활용

유형 1 정적분과 급수

161. $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

162. 삼차함수 $f(x)=3x^3+4x^2-2x-1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

163. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

164. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{n}{2n}\right)\frac{1}{n}$의 값은?

① $1-\ln 2$ ② $1-\ln 3$ ③ $2-\ln 2$
④ $1+\ln 2$ ⑤ $2-\ln 3$

165. $\lim_{n\to\infty}\frac{30}{n^2}\left(1\times\sqrt[n]{e}+2\times\sqrt[n]{e^2}+3\times\sqrt[n]{e^3}+\cdots+n\times\sqrt[n]{e^n}\right)$의 값을 구하시오.

166. $0\le x\le 1$일 때, 연속인 함수 $f(x)$가 $f(x)+f(1-x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\sin\frac{k\pi}{2n}$의 값은?

① π ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\pi+\frac{1}{\pi}$

④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

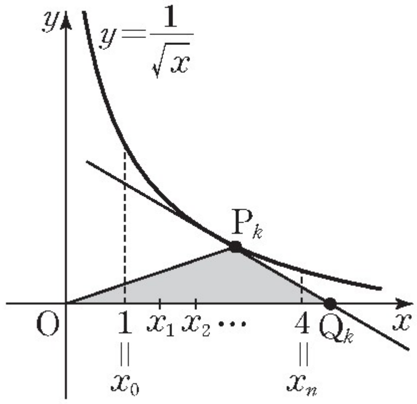
167. 그림과 같이 닫힌구간 $[1, 4]$를 n등분한 점을 각각

$$x_0(=1),\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n(=4)$$

라 하자. 곡선 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 위의 점

$$\mathrm{P}_k\left(x_k, \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)\ (k=1, 2, 3, \cdots, n)$$

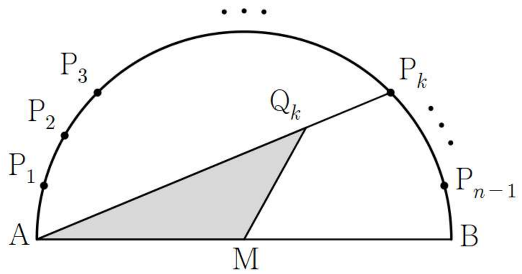
에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_k라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{P}_k$의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

168. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB를 n등분하는 점을 점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하자. 선분 AB의 중점을 M이라 하고, 각각의 자연수 $k=1, 2, 3, \cdots, n-1$에 대하여 선분 AP_k를 $3:1$로 내분하는 점을 Q_k라 할 때, 삼각형 AMQ_k의 넓이를 $S(k)$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S(k)$의 값은?



① $\frac{2}{\pi}$ ② $\frac{5}{2\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$

④ $\frac{7}{2\pi}$ ⑤ $\frac{4}{\pi}$

유형 2 넓이

169. 곡선 $y=\sqrt{x}-1$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

170. 곡선 $y=e^x-1$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e

④ $e+1$ ⑤ $e+2$

171. 곡선 $y=\frac{2-x}{x+2}$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $2\ln 2-1$　② $4\ln 2-2$　③ $2\ln 2$
④ $4\ln 2-1$　⑤ $4\ln 2$

172. 곡선 $y=|\sin 2x|+1$과 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\pi+1$　② $\pi+\frac{3}{2}$　③ $\pi+2$
④ $\pi+\frac{5}{2}$　⑤ $\pi+3$

173. 곡선 $y=\ln x$와 이 곡선 위의 두 점 $\mathrm{P}(1, 0)$, $\mathrm{Q}(e, 1)$을 지나는 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{3-e}{2}$　② $\frac{4-e}{2}$　③ $\frac{5-e}{2}$
④ $\frac{6-e}{2}$　⑤ $\frac{7-e}{2}$

174. 곡선 $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$과 두 직선 $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\ln 2-3$　② $\frac{1}{2}\ln 2-1$　③ $\frac{1}{2}\ln 2$
④ $\ln 2$　⑤ $\ln 2+1$

1. [정답] 12
2. [정답] ④
3. [정답] ②
4. [정답] ③
5. [정답] ①

6. [정답] 1
7. [정답] ③
8. [정답] ④
9. [정답] ①
10. [정답] ④

11. [정답] ⑤
12. [정답] ⑤
13. [정답] ②
14. [정답] $1+\sqrt{3}$
15. [정답] ②

16. [정답] 8
17. [정답] ①
18. [정답] ⑤
19. [정답] ①
20. [정답] ②

21. [정답] ⑤
22. [정답] ③
23. [정답] ②
24. [정답] ②
25. [정답] $\frac{1}{e^3}+3$, 1

26. [정답] ②
27. [정답] ④
28. [정답] ②
29. [정답] ①
30. [정답] ②

31. [정답] ④
32. [정답] 7
33. [정답] ②
34. [정답] -1
35. [정답] ①

36. [정답] 1
37. [정답] ⑤
38. [정답] ③
39. [정답] ②
40. [정답] ①

41. [정답] ④
42. [정답] 2
43. [정답] ④
44. [정답] ⑤
45. [정답] ④

46. [정답] ③
47. [정답] ②
48. [정답] ④
49. [정답] ③
50. [정답] 13

51. [정답] ③
52. [정답] ④
53. [정답] ③
54. [정답] ⑤
55. [정답] ③

56. [정답] 2
57. [정답] 6
58. [정답] ④
59. [정답] ②
60. [정답] ④

61. [정답] 2
62. [정답] $0 \le k < 2e$
63. [정답] ③
64. [정답] ③
65. [정답] ④

66. [정답] $\frac{2}{3}\pi$
67. [정답] ⑤
68. [정답] ③
69. [정답] ①
70. [정답] ④

71. [정답] ③
72. [정답] ⑤
73. [정답] ③
74. [정답] $\frac{90\sqrt{109}}{109}$ (m/s)
75. [정답] ①

76. [정답] ①
77. [정답] ①
78. [정답] e
79. [정답] 1
80. [정답] 30

81. [정답] ③
82. [정답] ⑤
83. [정답] ①
84. [정답] 9
85. [정답] ④

86. [정답] 7
87. [정답] ②
88. [정답] ②
89. [정답] ④
90. [정답] ⑤

91. [정답] 1
92. [정답] (1) $(x-1)e^x+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$
93. [정답] ⑤
94. [정답] ③
95. [정답] 1

96. [정답] 1
97. [정답] ③
98. [정답] ③
99. [정답] ③
100. [정답] ③

101. [정답] ④
102. [정답] ①
103. [정답] ①
104. [정답] 5
105. [정답] ②

106. [정답] ⑤
107. [정답] ⑤
108. [정답] ③
109. [정답] ②
110. [정답] ⑤

111. [정답] ①
112. [정답] ③
113. [정답] 2
114. [정답] ②
115. [정답] 4

116. [정답] 2
117. [정답] ②
118. [정답] ④
119. [정답] ②
120. [정답] ⑤

121. [정답] ⑤
122. [정답] ②
123. [정답] ④
124. [정답] 122
125. [정답] 21

126. [정답] ②
127. [정답] 4
128. [정답] ⑤
129. [정답] ⑤
130. [정답] 32

131. [정답] 3
132. [정답] ②
133. [정답] ②
134. [정답] -1
135. [정답] ①

136. [정답] ③
137. [정답] 5
138. [정답] ④
139. [정답] ②
140. [정답] ⑤

141. [정답] ④
142. [정답] ④
143. [정답] ④
144. [정답] ②
145. [정답] ①

146. [정답] ⑤
147. [정답] ③
148. [정답] ②
149. [정답] ③
150. [정답] ②

151. [정답] 1
152. [정답] ①
153. [정답] ③
154. [정답] ③
155. [정답] 32

156. [정답] ①
157. [정답] 2
158. [정답] ①
159. [정답] $-\frac{1}{2}$
160. [정답] ③

161. [정답] ④
162. [정답] ⑤
163. [정답] ③
164. [정답] ①
165. [정답] 30

166. [정답] ⑤
167. [정답] ②
168. [정답] ③
169. [정답] $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$
170. [정답] ①

171. [정답] ②
172. [정답] ③
173. [정답] ①
174. [정답] ③
175. [정답] 9

176. [정답] ②
177. [정답] ①
178. [정답] ④
179. [정답] ④
180. [정답] ②

181. [정답] ④
182. [정답] ②
183. [정답] $\sqrt{3}$
184. [정답] ②
185. [정답] ③

186. [정답] ⑤
187. [정답] 4
188. [정답] 4
189. [정답] ③
190. [정답] ⑤

191. [정답] ②
192. [정답] 340
193. [정답] 4
194. [정답] $\frac{\pi}{2}\ln\frac{8}{5}$
195. [정답] ⑤

196. [정답] 8
197. [정답] 3
198. [정답] ①
199. [정답] ④
200. [정답] ⑤

정답과 해설

1. [정답] 12

[해설]
$y=4\sin(\cos x)-2\pi$을 x에 관해 미분하면
$y' = -4\cos(\cos x)\sin x$
점 $\left(\frac{\pi}{2},\ -2\pi\right)$에서의 기울기는
$-4\cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}=-4$
따라서 접선의 방정식은
$y=-4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-2\pi=-4x$
이 접선이 점 $(-3,\ a)$를 지나므로 대입하면,
$a=-4(-3)=12$

2. [정답] ④

[해설]
$f(x)=(x^2-3x-3)e^x$ 에서
$f'(x)=(2x-3)e^x+(x^2-3x-3)e^x$
$=(x^2-x-6)e^x$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기 $m(a)$가 음수이어야 하므로
$m(a)=f'(a)=(a^2-a-6)e^a<0$
$e^a>0$ 이므로 $a^2-a-6<0$
$(a+2)(a-3)<0$
따라서 $-2<a<3$ 이므로 구하는 정수 a의 개수는 4 이다.

3. [정답] ②

[해설]
$x=t^2-t,\ y=t^2+2t$ 에서
$\frac{dx}{dt}=2t-1,\ \frac{dy}{dt}=2t+2$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{2t-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$t=2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=2$를 대입한 값과 같으므로 $\frac{2\times2+2}{2\times2-1}=2$
또 곡선 $x=t^2-t,\ y=t^2+2t$ 위의 $t=2$에 대응하는 점은 $(2,\ 8)$이므로 점 $(2,\ 8)$에서의 접선의 방정식은
$y-8=2(x-2),\ y=2x+4$
직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2, y절편은 4이므로
구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times4=4$

4. [정답] ③

[해설]
x축과 두 점에서 만나는 점은 $y=0$일 때이므로 $x^2=a^2$, 즉 $x=\pm a$이다. 그러면 점 P의 좌표는 $(-a,\ 0)$이고 점 Q의 좌표는 $(a,\ 0)$이므로 곡선의 변화율 $2x-y-xy'-4yy'=0$에 의해 $y'=\frac{2x-y}{x+4y}$이므로 두 접선의 방정식은 다음과 같다.
$$\begin{cases} l_1 : y=2(x+a) \\ l_2 : y=2(x-a) \end{cases}$$
이때 l_1 위의 점 $\mathrm{P}(-a,\ 0)$에서 l_2까지의 거리는
$4=\frac{4a}{\sqrt{5}}$ 이므로 $a=\sqrt{5}$ 이다.

5. [정답] ①

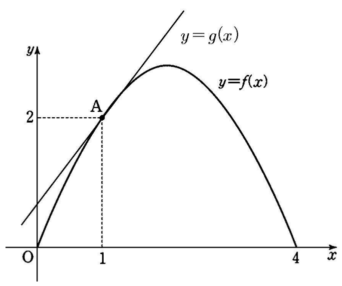
[해설]
접점의 x좌표를 p라 하면
$\frac{k}{p}=\ln p$이고
접점에서의 기울기가 일치하므로
$-\frac{k}{p^2}=\frac{1}{p}$에서 $\frac{k}{p}=-1$이므로 $p=\frac{1}{e}$, $k=-\frac{1}{e}$

6. [정답] 1

[해설]
만나는 점의 x좌표를 p라 하자.
$ke^{p-1}+1=p^2-3p+4$
$ke^{p-1}\times(2p-3)=-1$
위 두 식을 연립하면,
$\frac{-1}{2p-3}=p^2-3p+3$
$2p^3-9p^2+15p-8=0$
$(p-1)(2p^2-7p+8)=0$
$p=1$
$k=1$

7. [정답] ③

[해설]
$y=f(x)$가 위로 볼록한 함수이므로 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 $f(x)\le g(x)$ 를 만족하는 직선 $g(x)$는 $f(x)$의 $(1,\ 2)$에서의 접선이다.



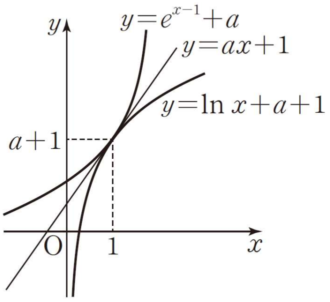
$f'(x)=\frac{2\sqrt{2}}{4}\pi\cos\frac{\pi}{4}x$ 이므로 $f'(1)=\frac{\pi}{2}$

$g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2$

$\therefore g(3)=\pi+2$

8. [정답] ④

[해설]
$\ln x+a+1\le f(x)\le e^{x-1}+a$에서 $x=1$을 대입하면
$\ln 1+a+1\le f(1)\le e^{1-1}+a$
$a+1\le f(1)\le a+1$
$a+1\le a+b\le a+1$이므로
$b=1$
즉, $f(x)=ax+1$이다.
$x=1$일 때, 세 함수 $y=\ln x+a+1$, $y=f(x)$, $y=e^{x-1}+a$의 함숫값이 모두 $a+1$로 같으므로 일차함수 $f(x)=ax+1$이 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식을 만족시키려면 다음 그림과 같이 직선 $y=ax+1$이 두 곡선 $y=\ln x+a+1$, $y=e^{x-1}+a$와 점 $(1,\ a+1)$에서 접해야 한다.



즉, $g(x)=e^{x-1}+a$라 하면 $f'(1)=g'(1)$이어야 한다.
$f'(x)=a$, $g'(x)=e^{x-1}$이므로
$f'(1)=g'(1)$에서
$a=e^0=1$
따라서 $f(x)=x+1$, $f'(x)=1$이므로
$f'(1)+f(2)=1+3=4$

[참고]
$h(x)=\ln x+a+1$이라 하면 $h'(x)=\frac{1}{x}$이고
$f'(1)=h'(1)$이어야 하므로
$a=1$

9. [정답] ①

[해설]
곡선 위 접점을 $(a,\ \sqrt{a})$라 두면
접선의 방정식은 $y=\frac{1}{\sqrt{a}}(x-a)+2\sqrt{a}$이다.
이 식은 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$을 지나므로,
$0=\frac{1}{\sqrt{a}}(-4-a)+2\sqrt{a}$, $a=4$

위 식이 y축과 만나는 점 B는 $(0,\ 2)$
따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$

10. [정답] ④

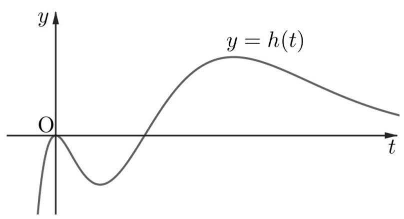
[해설]
$y'=2e^{-x}-(2x+a)e^{-x}=(-2x+2-a)e^{-x}$
$y=e^{-t}(-2t+2-a)(x-t)+(2t+a)e^{-t}$는 원점을 지나므로
$0=e^{-t}(-2t+2-a)(-t)+(2t+a)e^{-t}=e^{-t}(2t^2+at+a)$
t의 실근이 한 개이므로 $D=a^2-8a=0\ \therefore\ a=8$

11. [정답] ⑤

[해설]
$f(x)=(x-1)e^x$라 하면
$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$
접점의 좌표를 $(k,\ (k-1)e^k)$이라 하면
접선의 방정식은 $y-(k-1)e^k=ke^k(x-k)$
이 접선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로 $-(k-1)e^k=ke^k(a-k)$
$k^2-(a+1)k+1=0$
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로
판별식을 D라 하면
$D=(a+1)^2-4>0\ \therefore\ a<-3$ 또는 $a>1$
따라서 a의 값이 될 수 없는 정수는 -3, -2, -1, 0, 1이므로 그 합은
$-3-2-1+0+1=-5$이다.

12. [정답] ⑤

[해설]
$f'(x)=a(-x^2+3x-1)e^{-x}$
접점을 $(t,\ f(t))$라 놓으면
접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$
접선이 $(0,\ k)$를 지나므로
$k=f(t)-tf'(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$
$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$이라 놓으면
$h'(t)=a(-t^3+5t^2-4t)e^{-t}=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$
$h'(t)=0$에서 $t=0,\ 1,\ 4$
접선의 개수가 3개인 범위가 $-2<k<0$이므로
$y=k$와 $y=h(t)$의 교점의 개수가 3개이어야 한다.
(i) $a>0$일 때,
$\lim_{t\to-\infty}h(t)=-\infty$, $\lim_{t\to\infty}h(t)=0$이다.



$h(1)<k<0$에서 교점의 개수가 3개이므로

$h(1)=-\frac{a}{e}=-2$이다.

따라서 $a=2e$

(ⅱ) $a<0$일 때,

$k<0$인 범위에서 $y=k$와 $y=h(t)$의 교점의 개수가 3개가 불가능하다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2e$

[참고]

변곡점에서 접선의 개수가 바뀌므로

변곡점에서의 접선이 $(0,\ -2)$를 지난다.

$f''(x)=a(-x^2+5x-4)e^{-x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$

$x=1$에서의 접선의 방정식 $y=\frac{a}{e}(x-1)$

$(0,\ -2)$를 지나므로 $a=2e$

13. [정답] ②

[해설]

$f(x)=\frac{x+k}{x^2-x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+1)-(x+k)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$=\frac{-(x^2+2kx-k-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$x=0$에서 극솟값을 가지므로 $f'(0)=0$

$\frac{-(-k-1)}{1^2}=0$에서 $k=-1$

$$f'(x)=-\frac{x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 $f(x)$의 극댓값은

$$f(2)=\frac{2-1}{4-2+1}=\frac{1}{3}$$

14. [정답] $1+\sqrt{3}$

[해설]

$f'(x)=a\cos x-b\sin x+1$

이때 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{3}$와 $x=\pi$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b+1=0$

$f'(\pi)=-a+1=0$

따라서 $a=1,\ b=\sqrt{3}$

즉, $g(x)=ax+b-\ln x=x+\sqrt{3}-\ln x$

$g'(x)=1-\frac{1}{x}$이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$

$x>0$에서 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	$1+\sqrt{3}$ (극솟값)	↗

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $1+\sqrt{3}$이다.

15. [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^2e^{-x}$에서

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

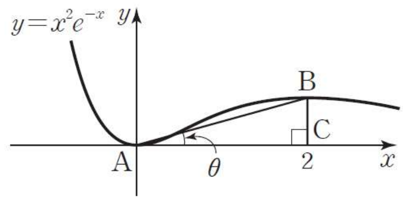
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=2$에서 극대이다.

$$f(0)=0,\ f(2)=4e^{-2}$$

이므로 $\mathrm{A}(0,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 4e^{-2})$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하면

$\mathrm{C}(2,\ 0)$이고, $\theta=\angle\mathrm{BAC}$이다.



따라서 $\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{4e^{-2}}{2}=2e^{-2}$

16. [정답] 8

[해설]

$f'(x)=(-ax-b+a)e^{-x-2}$

$f'(-1)=0$이므로 $2a-b=0$에서 $b=2a$

$f(x)=a(x+2)e^{-x-2}$

조건 (나)에서 (극댓값) ≤ 1을 알 수 있으므로

$f(-1)=ae^{-1}\le 1$

$a\le e$

따라서 $a=1$ 또는 $a=2$

$a=1$일 때, $b=2$, $a=2$일 때, $b=4$이므로 ab의 최댓값은 8

17. [정답] ①

[해설]

$f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-x$ 에서 $x>0$ 이고

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}-1=\dfrac{x-a-x^2}{x^2}$

$f'(x)=0$ 에서 $x^2-x+a=0$ …… ①

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 ①이 $x>0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ①의 판별식을 D 라고 하면

$D=1-4a>0$ $\quad\therefore\ a<\dfrac{1}{4}$

(ii) (두 근의 곱)$=a>0$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a 의 값의 범위는

$0<a<\dfrac{1}{4}$

18. [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=ke^x+x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=ke^x+2x$

i) $k=0$일 때 : $f'(x)=2x$이고 $x=0$일 때, 극솟값을 가진다.

ii) $k\neq 0$일 때 :

$f'(x)=0$에서 $-\dfrac{2}{k}x=e^x$

곡선 $y=f(x)$가 극값을 갖지 않아야 하므로 직선 $y=-\dfrac{2}{k}x$와 곡선 $y=e^x$가 만나지 않거나 직선 $y=-\dfrac{2}{k}x$가 곡선 $y=e^x$의 접선이어야 합니다.

직선 $y=-\dfrac{2}{k}x$는 항상 원점을 지나는 직선이므로 원점을 지나고 $y=e^x$에 접하는 직선의 기울기를 알 필요가 있습니다.

곡선 $y=e^x$ 위의 한 점 t에서 그은 접선의 방정식을 l이라 하면

$l: y=e^t(x-t)+e^t$

직선 l이 원점을 지나므로

$0=-te^t+e^t$ $\quad\therefore\ t=1$

따라서 원점을 지나고 $y=e^x$에 접하는 직선의 기울기는 $t=1$일 때, e이고 $0\le-\dfrac{2}{k}\le e$을 만족해야 합니다.

$\therefore\ k\le-\dfrac{2}{e}$

따라서 k의 최댓값은 $-\dfrac{2}{e}$입니다.

19. [정답] ①

[해설]

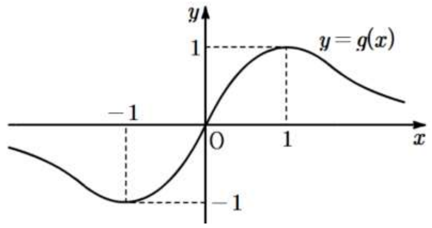
$f(x)=kx+\ln(x^2+1)$ 에서 $f'(x)=k+\dfrac{2x}{x^2+1}$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 $f'(x)\ge 0$ 또는 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $\dfrac{2x}{x^2+1}\ge-k$ 또는 $\dfrac{2x}{x^2+1}\le-k$

그런데 $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 라 하면, $g(x)$는 기함수이고

$g'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$이므로 극댓값 $g(1)=1$, 극솟값 $g(-1)=-1$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ 이므로 아래 그림과 같다.



따라서 $-k\le-1$ 또는 $-k\ge 1$

$\therefore\ k\ge 1,\ k\le-1$ $\therefore$ 양수 k의 최솟값은 1

20. [정답] ②

[해설]

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+k}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{x^2-4x+k}{2(x^2+k)}$

에서 모든 실수 x에 대하여 $2(x^2+k)>0$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+k\ge 0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-k\le 0$

따라서 $k\ge 4$이므로 구하는 양수 k의 최솟값은 4이다.

21. [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=\cos x-x\sin x$

$f'(-x)=\cos(-x)-(-x)\sin(-x)$

$=\cos x-x\sin x=f'(x)$

따라서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f'(x)=\cos x-x\sin x=x\cos x\left(\dfrac{1}{x}-\tan x\right)(x\neq 0)$

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$에서 $a\cos a>0$이므로 $f'(a)=0$이면

$\tan a=\dfrac{1}{a}$이다. (참)

ㄷ. $3<\pi<4$이므로 $\dfrac{3}{4}<\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$이고

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\tan x$의 그래프는 증가한다.

$\tan\dfrac{3}{4}<\tan\dfrac{\pi}{4}<\tan 1$이고

$\frac{1}{\frac{3}{4}}-\tan\frac{3}{4}>\frac{4}{3}-\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}>0$이므로

$f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}\cos\frac{3}{4}\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}-\tan\frac{3}{4}\right)>0$

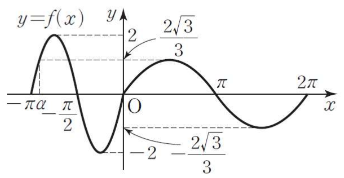
$\frac{1}{1}-\tan 1<1-\tan\frac{\pi}{4}=0$이므로 $f'(1)<0$

$f'\left(\frac{3}{4}\right)>0$, $f'(1)<0$이고 도함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$에서 $f'(c)=0$인 c가 존재하고 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극댓값을 갖는다.
(참)

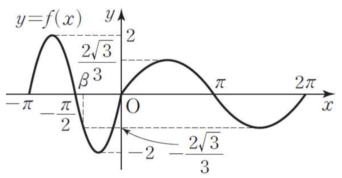
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. [정답] ③

[해설]



[그림 1]



[그림 2]

$0\le t\le\pi$일 때의 함수 $g(t)$는 [그림1]에서

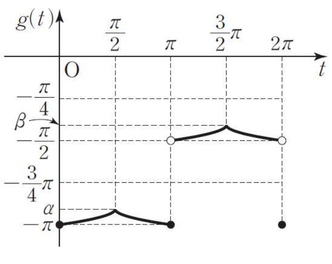
$-\pi\le g(t)\le\alpha<-\frac{3}{4}\pi$ (α는 상수)

$\pi<t<2\pi$일 때의 함수 $g(t)$는 [그림2]에서

$-\frac{\pi}{2}<g(t)\le\beta<-\frac{\pi}{4}$ (β는 상수)

$t=2\pi$일 때의 함수 $g(t)$의 값은 $-\pi$이다.

따라서 $0\le t\le 2\pi$에서 함수 $g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 위 그림에서 $\lim_{t\to\pi-}g(t)=-\pi$, $\lim_{t\to\pi+}g(t)=-\frac{\pi}{2}$이므로 함수 $g(t)$는 $t=\pi$에서 불연속이다.
(참)

ㄴ. t의 값이 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 증가할 때, $g(t)$의 값은 증가하다가 감소하므로 함수 $g(t)$는 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 하나의 극댓값 α를 갖는다.
또, t의 값이 열린구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 증가할 때, $g(t)$의 값은 증가하다가 감소하므로 함수 $g(t)$는 열린구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 하나의 극댓값 β를 갖는다.
한편, 함수 $g(t)$는 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 2개의 극댓값을 갖는다.
(참)

ㄷ. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin t=2\sin\{2g(t)\}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{3}\sin t=\sin\{2g(t)\}$

…… ㉠

위 등식의 양변을 $t\left(t\ne\frac{\pi}{2},\ t\ne\pi,\ t\ne\frac{3\pi}{2}\right)$에 대하여 미분하면 $\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t=2g'(t)\cos\{2g(t)\}$

…… ㉡

㉠의 양변에 $t=\frac{2}{3}\pi$를 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\sin\left\{2g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left\{2g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$\therefore \sin\left\{2g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=\frac{1}{2}$

이때 $\frac{\pi}{2}<t<\pi$일 때, $-2\pi<2g(t)<-\frac{3}{2}\pi$이므로

$2g\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{11}{6}\pi$

이때 ㉡의 양변에 $t=\frac{2}{3}\pi$를 대입하면

$\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{2}{3}\pi=2g'\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cos\left\{2g\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2g'\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(-\frac{11}{6}\pi\right)$

$-\frac{\sqrt{3}}{6}=2g'\left(\frac{2}{3}\pi\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore g'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{6}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

23. [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가지며 $f'(1)=0$이므로

$f''(1)=-1+a+2=a+1<0$, 즉 $a<-1$

이면 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이다.

한편 $a=-1$일 때, $f''(x)=-x-\frac{1}{x}+2=-\frac{(x-1)^2}{x}$이므로

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음이다.

이때 $x=1$의 좌우에서 함수 $f'(x)$는 감소하고 $f'(1)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

따라서 $a \le -1$이므로 정수 a의 최댓값은 -1이다.

24. [정답] ②

[해설]
$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$에서
$f'(x)=\sqrt{4-x^2}+x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$
$=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$ (단, $-2<x<2$)
구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극솟값이면서 최솟값 -2를 갖고, $x=\sqrt{2}$일 때 극댓값이면서 최댓값 2를 갖는다.
이때 구간 $[a, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 -2이므로 $-\sqrt{2}\in[a, 2]$를 만족해야한다.
즉 $a\le-\sqrt{2}$
따라서 실수 a의 최댓값은 $-\sqrt{2}$이다.

25. [정답] $\dfrac{1}{e^3}+3$, 1

[해설]
$f(x)=e^x-x$에서 $f'(x)=e^x-1$
$-3\le x\le 1$일 때, $f'(x)=0$에서 $x=0$

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{e^3}+3$	↘	1	↗	$e-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 최대이고 최댓값은 $\dfrac{1}{e^3}+3$이고, $x=0$에서 최소이고 최솟값은 1이다.

26. [정답] ②

[해설]
$f(x)=\cos x+x\sin x$에서
$f'(x)=-\sin x+(\sin x+x\cos x)=x\cos x$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$
$0<x<2\pi$에서 $\cos x=0$이려면 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$
$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\dfrac{\pi}{2}$	↘	$-\dfrac{3}{2}\pi$	↗	1

닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\dfrac{3}{2}\pi$
또한 $f(0)=1$, $f(2\pi)=1$이다.
따라서 최댓값 $M=\dfrac{\pi}{2}$, 최솟값 $m=-\dfrac{3}{2}\pi$이므로
$M\times m=-\dfrac{3}{4}\pi^2$

27. [정답] ④

[해설]
$f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$에서
$f'(x)=\dfrac{(\sin x)'(\cos x+2)+\sin x(\cos x+2)'}{(\cos x+2)^2}$
$=\dfrac{\cos x(\cos x+2)+\sin^2 x}{(\cos x+2)^2}$
$=\dfrac{2\cos x+1}{(\cos x+2)^2}$
$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 이므로
$x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$
이때, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	↗	0

즉 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$일 때 최댓값 $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{4}{3}\pi$일 때 최솟값 $f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 을 갖는다.
따라서 $a=\dfrac{2}{3}\pi$, $b=\dfrac{4}{3}\pi$이므로
$a+b=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi=2\pi$

28. [정답] ②

[해설]
$y=\sin^2 x$에서 $y'=2\sin x\cos x$
곡선 $y=\sin^2 x$위의 점 $(t, \sin^2 t)$에서 접선의 기울기는 $2\sin t\cos t$이므로 접선의 방정식은
$$y-\sin^2 t=2\sin t\cos t(x-t)$$
에서
$$y=2x\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠의 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 y좌표가 $f(t)$이므로

$$f(t)=\pi\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t$$
$$=\sin t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$$
$$f'(t)=\cos t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$$
$$+\sin t(-\pi\sin t+\cos t-2\cos t+2t\sin t)$$
$$=(\pi-2t)(\cos^2 t-\sin^2 t)$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때 $f'(t)=0$에서 $x-2\pi\neq 0$이므로

$$\cos^2 t-\sin^2 t=0$$

그런데 $0<t<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos t=\sin t$

따라서 $t=\frac{\pi}{4}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

함수 $f(t)$는 $t=\frac{\pi}{4}$에서 극대이면서 최대가 된다

따라서 $f(t)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

29. [정답] ①

[해설]

$f(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>0)$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

따라서 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$$

$$g'(t)=\frac{-\frac{1}{t}t^2-(1-\ln t)2t}{t^4}=\frac{-3+2\ln t}{t^3}$$

따라서 $\frac{1}{e}\le t\le e^2$에서 $g(t)$는 $t=e^{\frac{3}{2}}$일 때, 극솟값을 갖는다. 따라서 최댓값, 최솟값은

$$M=g\left(\frac{1}{e}\right)=2e^2,\ m=g\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=-\frac{1}{2e^3}$$

$$Mm=-\frac{1}{e}$$

30. [정답] ②

[해설]

$Q(a,\ 0)$이고 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{a}x+1-\ln a$이므로 $R(a-a\ln a,\ 0)$이다.

삼각형 PQR의 넓이를 $S(a)$라고 한다면 $S(a)=\frac{a}{2}(\ln a)^2$이고

$S'(a)=\ln a\left(\frac{\ln a}{2}+1\right)$이므로 $a=e^{-2}$에서 최댓값 $\frac{2}{e^2}$을 갖는다.

31. [정답] ④

[해설]

$y=2\sin x$에서 $y'=2\cos x$

점 $\mathrm{P}(t,\ 2\sin t)\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-2\sin t=2\cos t(x-t)$

$y=2\cos t\times x+2\sin t-2t\cos t$

점 Q의 좌표는 $(0,\ 2\sin t)$

삼각형 PRQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times\{2\sin t-(2\sin t-2t\cos t)\}$$
$$=t^2\cos t$$

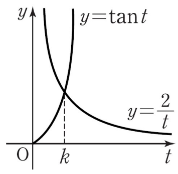
$S'(t)=2t\cos t-t^2\sin t=t(2\cos t-t\sin t)$

$S'(t)=0$에서 $t(2\cos t-t\sin t)=0$

$$2\cos t=t\sin t$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$, $0<\cos t<1$이므로 $\tan t=\frac{2}{t}$

이때 $f(t)=\tan t,\ g(t)=\frac{2}{t}$라 하자.



$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 두 곡선 $y=f(t)$, $y=g(t)$는 한 점에서 만난다.

두 곡선 $y=f(t),\ y=g(t)$의 교점의 t의 좌표를 $k\left(0<k<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $f(k)=g(k)$이므로 $\tan k=\frac{2}{k}$

$S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	k	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S9t$		↗	극대	↘	

$S(t)$는 $t=k$에서 극대이면서 동시에 최댓값을 갖는다.

즉, $\alpha=k$이므로 $\tan\alpha=\frac{2}{\alpha}$이다.

$\therefore\ \alpha^2\sec^2\alpha-\alpha^2=\alpha^2(\sec^2\alpha-1)=\alpha^2\tan^2\alpha=4$

32. [정답] 7

[해설]

오른쪽 그림과 같이 $\angle\mathrm{AOD}=\theta$, 꼭짓점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{\mathrm{DH}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$이고 $\overline{\mathrm{DC}}=2\cos\theta$이므로 등변사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$는

감겨있는
수학의 눈을
번쩍
뜨이게하는
공양미
Light
이백제