



맵기조
절 불가!

봉쌈이

추천하고

찜한

문제 닭



2024년 수학(상) 중간

저자소개

대치 이것이 수학이다 대표강사
현 이투스 온라인 강사
인피니트 연구소

이봉우 선생님



연락처 02-501-3747
카카오톡 bong800
유튜브 이봉우 검색
인스타 ibong400

CONTENTS

01 | 다항식의 연산 3P

02 | 항등식과 나머지 정리 10P

03 | 인수분해 36P

04 | 복소수 49P

05 | 이차방정식 63P

06 | 이차함수와 이차방정식 81P

01

다항식의 연산

1. $x+y=3$, $x^2+y^2=7$ 일때, x^7+y^7 의 값은?

- ① 843 ② 852 ③ 861
④ 1125 ⑤ 1323

2. 양수 x 에 대하여 $x^4-14x^2+1=0$ 일 때,

$x^3-2x^2-3x-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15



3. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=9$, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2=\frac{3}{2}$ 일

때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수 $abc < 0$)

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

4. 실수 x, y, z 가

$$x+y+z=1,$$

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=-1$$

을 만족시킬 때, $x^2+y^2+z^2$ 의 값은? (단, $xyz \neq 0$ 이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5.
다항식 $P(x, y, z)$ 를

$$P(x, y, z) = xy + yz + zx - 4$$

라 하자. 다음 조건을 모두 만족시키는 세 실수 a, b, c 에 대하여 $P(ab, bc, ca)$ 의 값은?

- (가) $P(a, b, c) = 10$

(나) $P(ab, ab, 1) + P(bc, bc, 1) + P(ca, ca, 1) = 164$

- ① 20 ② 21 ③ 22

④ 23 ⑤ 24

6.
다음은 $x + y + z = 5$, $xyz = -3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 15$ 일 때,

$x^5 + y^5 + z^5$ 의 값이 (가)임을 밝히는 과정이다.

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$xy + yz + zx = \text{(나)}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

이므로

$$x^3 + y^3 + z^3 = \text{(다)}$$
 (이하 생략)

(가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 할 때, $a - b - c$ 의 값은?

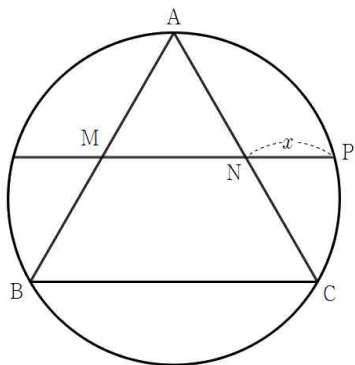
- ① 279 ② 284 ③ 289

④ 294 ⑤ 299



7. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 N에 가까운 점을 P라 하자.

$\overline{NP} = x$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값은?



- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

8. 다항식 $2x^4 + 4x^2 + 2x$ 를 다항식 $A(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $4x^2 - 3x$ 이고, 다항식 $A(x)$ 를 다항식 $B(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $3x + 5$ 이다. 다항식 $A(x) + xB(x)$ 는? (단, 두 다항식 $A(x)$, $B(x)$ 의 모든 계수는 정수이고, 두 다항식의 최고차항의 계수는 모두 20이며, 몫이 1인 경우는 생각하지 않는다.)

- ① $2x^3 + 5$ ② $4x^3 - 3x + 5$
③ $4x^3 + x^2 - 2x + 3$ ④ $5x^3 - 2x^2 + x - 7$
⑤ $5x^3 + x^2 + 4x + 2$

02

**항등식과
나머지 정리**



12. 삼차다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 있다. 0이 아닌

모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) = x^3 - 9 + \frac{1}{x^3}$ 이 성립할

때, $b - a - c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 상수이다.)

- ① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

13. 임의의 실수 x 에 대하여 다항식 $f(x)$ 가

$$f(x^2 + x) = x^2 f(x) + 2x + 3$$

을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

14. $x^3+3x-1=0$ 의 근을 α 라 할 때,
 $(\alpha^2+\alpha+1)P(\alpha)=1$ 을 만족시키는 차수가 최소인 다항식 $P(x)$ 에 대하여 $P(3)$ 의 값은?
- ① $\frac{10}{3}$

② $\frac{11}{3}$

③ 4

④ $\frac{13}{3}$

⑤ $\frac{14}{3}$

15. 다항식
- $$f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$
- 를 $x-12$ 로 나눈 나머지가 2023일 때, $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 나머지는? (단, a, b, c, d 는 10보다 작은 음이 아닌 정수이다.)
- ① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9



16. 삼차식 $f(x)$ 를 $x+1$, $(x+1)^2$ 으로 각각 나눈 나머지의 합이 6이다. $f(x)$ 를 $(x+1)^3$ 으로 나눈 나머지를 ax^2+bx+c 라 할 때, $a-b+c$ 의 값은? (단, a , b , c 는 상수)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

17. 다항식 $x^{12}+x^8+x^4+1$ 을 $(x^3+x^2+x+1)^2$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(2)$ 의 값을 구하시오.

03

인수분해



62. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=6$,

$a^2+b^2+c^2=28$ 일 때,

$(a^2-bc)(b^2-ca)+(b^2-ca)(c^2-ab)+(c^2-ab)(a^2-bc)$
의 값을 구하시오.

63. 정수 a, b, c 에 대하여 다항식

$x^4-4x^3-3x^2+14x-8$ 을 인수분해 한 식이

$(x+a)^2(x+b)(x+c)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

64. 300개의 다항식

$x^4 + x^2 - 1, x^4 + x^2 - 2, x^4 + x^2 - 3, \dots, x^4 + x^2 - 300$
 중에서 모든 항의 계수와 상수항이 정수인 범위에서 더 이상 인수분해 되지 않을 때까지 인수분해 하면 x 에 대한 일차식 2개와 이차식 1개의 곱으로 인수분해 되는 다항식은 n 개 있다. 이 n 개 다항식의 상수항을 a_1, a_2, \dots, a_n 이라 할 때, $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 의 값을 구하시오.

65. $(x-5)(x-3)(x+2)(x+4)+t$ 가 $f(1)=13$ 인 이차식

$f(x)$ 의 제곱으로 인수분해 될 때, 상수 t 의 값과 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.



66. 다항식 $3x^3 + (a+4)x^2 + (a+7)x + 6$ 의 계수가 모두 정수인 세 일차식의 곱으로 인수분해되도록 하는 정수 a 의 개수는?

- ① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

67. 다항식

$$2x^3 + (a-6)x^2 - (a-16)x - 12$$

가 계수가 모두 정수인 세 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 하는 정수 a 의 최댓값은?

- ① -11 ② 2 ③ 13
④ 29 ⑤ 45

68. 자연수 n 에 대하여 다항식

$x^4 + nx^3 + (n+1)x^2 + nx + 1$ 의 계수와 상수항이 모두 정수이며 최고차항의 계수가 1인 서로 다른 두 개의 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 의 곱으로 인수분해 될 때, $f(x)$ 의 일차항의 계수와 $g(x)$ 의 일차항의 계수의 합을 $P(n)$ 이라 하자. $P(3)+P(4)+ \cdots + P(8)$ 의 값은?

- ① 31
 ② 32
 ③ 33
- ④ 34
 ⑤ 35

69. 다항식 $P(x)=x^4-px^2+a$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 50 이하의 소수 p 의 개수를 구하시오.

- (가) 다항식 $P(x)$ 는 일차식 $x-1$ 을 인수로 갖는다.
- (나) 다항식 $P(x)$ 는 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 네 개의 다항식의 곱으로 인수분해 된다.



70. 다항식

$$P(x) = x^4 - 145x^2 + b$$

에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 다항식 $P(x)$ 의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

- (가) $P(x)$ 를 $x-a$ 로 나누어떨어지게 하는 자연수 a, b 가 존재한다.
 (나) $P(x)$ 는 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 네 개의 다항식의 곱으로 인수분해된다.

71. 두 자연수 a, b 에 대하여 일차식 $x+a$ 를 인수로

가지는 다항식 $P(x) = x^4 - 170x^2 + b$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 세 개의 다항식의 곱으로 인수분해 된다.

모든 다항식 $P(x)$ 의 개수를 p 라고 하고, b 의 최댓값을 q 라고 할 때, $\frac{p^2 + q}{10}$ 의 값을 구하시오.

72. 정수 n 에 대하여 $\frac{2n^3+7n^2+10n+8}{n^2+n-2}$ 의 값이 정수가

되도록 하는 모든 n 의 값의 합은?

- ① 0
 ② 2
 ③ 4
- ④ 6
 ⑤ 8

73. $1 < a < b < c$ 인 자연수 a, b, c 에 대하여 다음 등식이 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=280$$

- ① 7
 ② 8
 ③ 9
- ④ 10
 ⑤ 11



74. 두 다항식

$$f(x) = 2x^2 - ax + 4, \quad g(x) = x^2 + ax - 7$$

모두 일차 항의 계수가 1이고 상수항이 0이 아닌 일차식으로 나누면 나머지가 0일 때, a 의 값은 $a = p$, $a = q$ 이다.

$p^2 + q^2$ 의 값은? (단, a , p , q 는 상수이다.)

- ① 18 ② 32 ③ 50
④ 72 ⑤ 98

75. 계수와 상수항이 모두 실수인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 가

다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x)g(x) = -x^4 + 4x^3 + 52x^2 - 112x - 384$
(나) 이차함수 $y = f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값을 갖는다.
(다) $f(0) + g(0) = 92$

위 조건을 모두 만족시키는 모든 이차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 값의 합을 구하시오.

76. 최고차항의 계수가 1이고 모든 계수가 정수인 일차 이상의 다항식 $p(x)$, $q(x)$ 에 대하여

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = p(x)q(x)$$

이다. $p(x)+q(x)$ 중 차수가 가장 높은 다항식을 $f(x)$, 차수가 가장 낮은 다항식을 $g(x)$ 라 할 때, $f(5)+g(4)$ 의 값을 구하시오.

77. $x^{32}-1$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자.

$n < 5$ 인 자연수 n 에 대하여 다항식 $f_n(x)$ 가 항등식

$$(x^{2^n} + 1)f_n(x) = Q(x)$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

\neg . $n < 5$ 인 자연수 n 에 대하여 $f_n(-1) = 0$ 이다.

\angle . $f_2(x) + f_3(x)$ 는 $x^8 + x^4 + 2$ 를 인수로 갖는다.

\sqsubset . $f_n(x)$ 가 $x^{16} + 1$ 로 나누어떨어지는 n 의 최댓값은 4이다.

- ① \neg

② \angle

③ \neg, \angle
- ④ \neg, \sqsubset

⑤ \neg, \angle, \sqsubset



78. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?

(가) $4a^2 - 4b^2 - 4b - 1 = 0$

(나) $a^3 + (b-c)a^2 - (b^2 + c^2)a - b^3 + b^2c - bc^2 + c^3 = 0$

(다) 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3}{2}$ 이다.

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

79. $27^6 - 1$ 의 약수 중 두 자리 자연수의 개수는? (단, 757은 소수이며, $703 = 19 \times 37$ 이다.)

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

80. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 모두 자연수이고, 등식

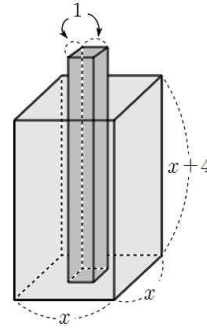
$$b^3 + (3a-4)b^2 + (3a^2-8a)b + a^3 - 4a^2 = 0$$

이 성립할 때, bc 의 최댓값은? (단, $a \leq b \leq c$ 이다.)

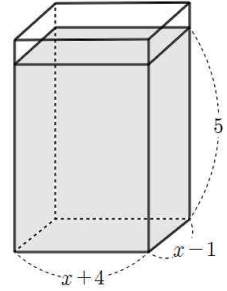
- ① 6 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 12

81. [그림 1]과 같이 물이 가득 담긴 직육면체 모양의

그릇에 직육면체 모양의 막대를 밀면과 맞닿게 수직으로 넣은 다음 남아있는 물을 [그림 2]와 같은 비어있는 직육면체 모양의 그릇에 옮겨 담았다. [그림 2]의 수면의 높이가 5일 때, [그림 2]의 그릇을 채운 물의 부피는? (단, 막대의 길이는 $x+4$ 보다 길다.)



[그림 1]



[그림 2]

- ① 30 ② 70 ③ 120
④ 180 ⑤ 250



82. $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x^2-x+1$ 에 대하여

$f(x)=g(x+1)$ 이 항상 성립한다. 이를 이용하면

$$\frac{(6^3-1)(7^3-1)(8^3-1)(9^3-1)(10^3-1)}{(6^3+1)(7^3+1)(8^3+1)(9^3+1)(10^3+1)} = \frac{q}{p}$$

가 된다. 이때 0이 아니면서 서로소인 정수 p , q 에 대하여 $p+q$ 의 값은?

- ① 670 ② 672 ③ 674
④ 676 ⑤ 678

83. 9 이하의 자연수 n 에 대하여 다항식 $P(x)$ 가

$$P(x)=x^4+x^2-n^2-n$$

일 때, 다음 물음에 답하시오.

- (1) $P(\sqrt{n})$ 의 값을 구하시오.
(2) 방정식 $P(x)=0$ 의 실근의 개수를 구하시오.
(3) 모든 정수 k 에 대하여 $P(k) \neq 0$ 이 되도록 하는 모든 n 값의 합을 구하시오.

- 84.** 사차식 $f(x)=x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ 와 최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $g(x), h(x)$ 에 대하여 $f(x)=g(x)h(x)$ 가 성립할 때, $i(x)=g(x)+h(x)$ 라 하자. $i(5)$ 의 값이 홀수일 때, 함수 $y=i(x)$ 의 최솟값은?
- ① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{2}$

04

복소수

85. 1보다 큰 상수 c 에 대하여 다항식

$$p(x) = (c - x^2)(c - x^4)(c - x^6)(c - x^8)(c - x^{10})$$

을 $x^2 - x + 1$ 로 나누었을 때, 나머지를 $R_1(x)$ 이라 하면,

$$R_1(2) = \frac{361}{16}(c - 1) \text{이다. } p(x) \text{를 } x^2 + x + 1 \text{로 나누었을 때,}$$

나머지를 $R_2(x)$ 라 하자. 서로소인 두 자연수 m 과 n 에 대하여

$$R_2(x) = \frac{m}{n} \text{일 때, } m + n \text{의 값을 구하시오.}$$

86. $z = a + bi$ (a, b 는 실수, $-1 \leq a \leq 1$)라 하고, $z\bar{z} = 1$ 일

$$\text{때 } \left(\left(\frac{1}{z} \right)^2 + 1 \right) \left(\left(\frac{1}{\bar{z}} \right)^2 + 1 \right) + (z + 2)(\bar{z} + 2) \text{의 최댓값을 } m,$$

최솟값을 n 이라 할 때, $m - n$ 의 값은? (단, \bar{z} 는 z 의 켤레복소수이다.)

- ① 4 ② 5 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 13



87. 0이 아닌 세 복소수 α, β, γ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \text{(나)} \quad & \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \end{aligned}$$

이때, $\left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}$ 는 $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

- ① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

88. 0이 아닌 세 복소수 α, β, γ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \text{(나)} \quad & \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} = 0 \end{aligned}$$

이때 $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)} + \overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + \overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}\overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ 와 $\overline{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}$ 는 각각 $\frac{\gamma}{\alpha}$ 와 $\frac{\beta}{\gamma}$ 의 켤레복소수이다.)

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

89. 0이 아닌 세 복소수 α, β, γ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha + \beta + \gamma = 0$
 (나) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ 는 $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 켤레복소수이다.)

<보 기>

㉠. $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$
 ㉡. $\alpha^2 = \beta\gamma$
 ㉢. $\frac{\beta}{\gamma} \times \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = -1$

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

90. 0이 아닌 세 복소수 α, β, γ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0$
 (나) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$

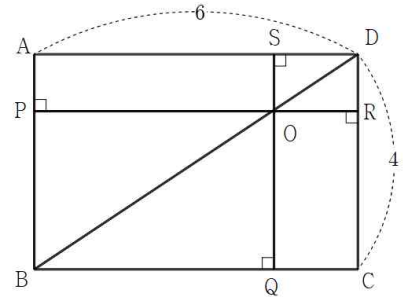
$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)\overline{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

05

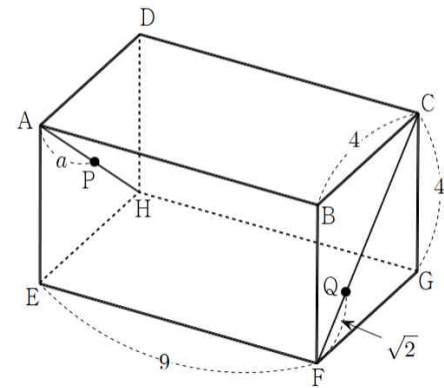
이차방정식

111. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD 위에 한 점 O를 잡고, 점 O에서 네 변 AB, BC, CD, DA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S라 하자. 사각형 APOS와 사각형 OQCR의 넓이의 합이 9이고 $\overline{AP}<\overline{PB}$ 일 때, 선분 AP의 길이는?



- ① $\frac{1}{4}$
 ② $\frac{1}{2}$
 ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
 ⑤ $\frac{5}{4}$

112. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=4$, $\overline{AE}=4$ 인 직육면체 ABCD-EFGH에서 $\overline{AP}=a$ ($0 \leq a \leq 4\sqrt{2}$), $\overline{FQ}=\sqrt{2}$ 인 두 점 P, Q가 각각 두 선분 AH, CF 위에 있다. 점 P에서 직육면체의 겉면을 따라 선분 CD 위의 점과 선분 AB 위의 점을 차례대로 거쳐서 점 Q에 도달하는 최단거리를 $f(a)$ 라 할 때, $\{f(a)\}^2$ 의 최솟값은?



- ① $\frac{439}{2}$
 ② 220
 ③ $\frac{441}{2}$
- ④ 221
 ⑤ $\frac{443}{2}$



113. 정수 p 에 대하여 x 에 대한 이차방정식

$x^2 - 2px + 15p - 14 = 0$ 이 근 α 를 가질 때, α^3 이 정수가 되도록 하는 정수 p 의 값의 합을 구하시오.

114. x 에 대한 이차방정식

$$x^2 - 2(m+a)x + m^2 - 4m + b^2 = 0$$

이 실수 m 의 값에 관계없이 항상 실근을 갖도록 하는 정수 a, b 에 대하여, $a+b$ 의 최솟값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

- 115.** 두 정수 a, b 에 대하여 다항식 x^2+ax-y^2+by-5 가 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 하는 모든 a 의 값의 곱은?
 ① -16 ② -8 ③ 0
 ④ 8 ⑤ 16

- 116.** x 에 대한 이차방정식

$$(2n-11)^2x^2-(2n^2-k)x+\frac{1}{4}(n-1)^2=0$$
 이 중근을 갖도록 하는 실수 k 의 값을 α_n 이라 하자. n 이 자연수일 때, α_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 자연수 n 에 대하여 $\alpha_{n+1}-\alpha_n > 0$
 (나) $\alpha_6 > 73$

- 다음 물음에 답하시오.
 (1) α_1 의 값을 구하시오.
 (2) 순서쌍 $(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 의 개수를 구하시오.
 (3) $\alpha_4+\alpha_5$ 의 최댓값을 구하시오.
 (4) α_8 의 값을 구하시오.



117. 이차방정식 $x^2 - 3x + 3 = 0$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때,
 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의
 켤레복소수이다.)

<보 기>

ㄱ. $\omega + \bar{\omega} = 3, \omega \bar{\omega} = 3$
 ㄴ. $\omega^4 - 2\omega^3 + \omega^2 + 2\omega = 2\omega - 3$
 ㄷ. $\frac{1}{400}(2\omega^4 + 2\omega^3 + 2\omega^2 + 4\omega)$
 $\{2(\bar{\omega})^4 + 2(\bar{\omega})^3 + 2(\bar{\omega})^2 + 4(\bar{\omega})\} = 3$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

118. $abc \neq 0$ 인 실수 a, b, c 에 대하여 등식

$$a^3 + c^3 + 3abc = b^3 \text{이 성립할 때,}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p 의 값은?

이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 합과 곱
 은 각각 $-5, p$ 이다.

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

06

**이차함수와
이차방정식**

144. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 7$ 의 그래프가 직선 $y = mx + 9$ 와 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 α , β 라 하자. $\alpha^3 + \beta^3 = 20$ 일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

145. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - \frac{a}{4}$ 의 그래프가 직선 $y = -2x + \frac{a}{4}$ 와 한 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a 값의 합은?

① 2
 ② $\frac{5}{4}$
 ③ 0
 ④ $-\frac{5}{4}$
 ⑤ -2



146. 두 이차함수

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = -x^2 + cx + d$$

에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접하고, 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c, d 는 실수이다.)

<보 기>

- ㄱ. $a^2 = 4b$
 ㄴ. $a^2 - c^2 < 4(b + d)$
 ㄷ. $(a - c)^2 - 8(b - d) > 0$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

147. 곡선 $y = -x^2 + 4x + k$ 에 접하고 점 $(3, 1)$ 을 지나는 두 직선을 l_1, l_2 라 하자. 접점의 x 좌표를 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $k < -2$)

<보 기>

- ㄱ. 직선 l_1, l_2 의 기울기의 곱이 -4 이면 $k = -3$ 이다.
 ㄴ. $k = -3$ 일 때, $\beta = 4$ 이다.
 ㄷ. k 의 값에 관계없이 $\alpha + \beta = 6$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

148. 함수 $f(x)=x^2+px+q$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 에 접하고, 점 $(k, -1)$ 을 지나는 서로 다른 두 직선을 l_1, l_2 라 하자. 두 직선 l_1, l_2 의 접점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f(k) > -1$ 이고, p, q 는 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. $k=0$ 이면 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 합은 $2p$ 이다.
 ㄴ. $k=1, \alpha=-3$ 이면 $\beta=1$ 이다.
 ㄷ. $k=2, \alpha=-\frac{p}{2}-1$ 이면 $\beta=\frac{p}{2}+5$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

149. 자연수 n 에 대하여 이차함수 $y=3x^2$ 의 그래프와 직선 $y=nx$ 의 교점 중 원점이 아닌 점을 A, 이차함수 $y=3x^2$ 의 그래프와 직선 $y=(n+3)x$ 의 교점 중 원점이 아닌 점을 B이라 하자. 다음은 삼각형 OAB의 넓이를 $S(n)$ 이라 할 때, $S(n) > 100$ 를 만족시키는 n 의 최솟값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

이차함수 $y=3x^2$ 의 그래프와 직선 $y=nx$ 의 교점 A의 x 좌표를 구하면 $3x^2=nx$ ($x \neq 0$)에서 $x=\frac{n}{3}$ 이다.

점 A를 지나고 x 축에 수직인 직선이 직선 $y=(n+3)x$ 와 만나는 점을 A'이라 하자.

선분 AA'의 길이는 $\overline{AA'} = \boxed{(가)} - \frac{n^2}{3}$ 이므로

삼각형 OAB의 넓이 $S(n)$ 은 $S(n) = \frac{1}{2} \times n \times \boxed{(나)}$ 이다.

따라서 $S(n) > 100$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 $\boxed{(다)}$ 이다.

- 위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $f(k)-g(k)$ 의 값은?
- ① 201 ② 207 ③ 215
 ④ 225 ⑤ 240



150. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$, 일차함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)+g(x)=-20$ 이다.
 (나) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=2$ 에서 접한다.
 (다) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=h(x)$ 는 $x=3$ 에서 접한다.

$f(-1) \times g(0) \times h(1)$ 의 값은?

- ① 160 ② 165 ③ 170
 ④ 175 ⑤ 180

151. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

- (가) $f(4)=0$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(1)$

<보 기>

- ㄱ. $f(-2)=0$
 ㄴ. $f(0) < f(3) < f\left(-\frac{5}{2}\right)$
 ㄷ. $f(-1)=a$ 라 할 때, x 에 대한 방정식 $f(x)=3ax$ 의 두 실근의 합은 -13 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



1. [정답] ①
2. [정답] ②
3. [정답] ④
4. [정답] ①
5. [정답] ①
6. [정답] ①
7. [정답] ②
8. [정답] ②
9. [정답] ③
10. [정답] ②
11. [정답] ②
12. [정답] ⑤
13. [정답] ⑤
14. [정답] ②
15. [정답] ③
16. [정답] ③
17. [정답] 94
18. [정답] ④
19. [정답] ⑤
20. [정답] ③
21. [정답] ①
22. [정답] 9
23. [정답] ①
24. [정답] ③
25. [정답] 595
26. [정답] ③
27. [정답] ①
28. [정답] ⑤
29. [정답] 7
30. [정답] ④
31. [정답] ⑤
32. [정답] ③
33. [정답] $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$
34. [정답] 33
35. [정답] ⑤
36. [정답] ②
37. [정답] $-5x-6$
38. [정답] ③
39. [정답] ④
40. [정답] ④
41. [정답] ④
42. [정답] 870
43. [정답] ②
44. [정답] -20
45. [정답] ①
46. [정답] 13
47. [정답] ①
48. [정답] ⑤
49. [정답] 24
50. [정답] 70
51. [정답] 9
52. [정답] 110
53. [정답] ④
54. [정답] 946
55. [정답] ④
56. [정답] ③
57. [정답] ③
58. [정답] ①
59. [정답] ③
60. [정답] (1) -5 (2) -45
61. [정답] 100
62. [정답] -96
63. [정답] -3
64. [정답] -384
65. [정답] 49, 7
66. [정답] ③
67. [정답] ④
68. [정답] ③
69. [정답] 3
70. [정답] 2
71. [정답] 729
72. [정답] ⑤
73. [정답] ④
74. [정답] ④
75. [정답] 206
76. [정답] 121
77. [정답] ③
78. [정답] ②
79. [정답] ④
80. [정답] ③
81. [정답] ③
82. [정답] ③
83. [정답] (1) 0 (2) 2 (3) 31
84. [정답] ②
85. [정답] 393
86. [정답] ④
87. [정답] ①
88. [정답] ②
89. [정답] ③
90. [정답] ④
91. [정답] ⑤
92. [정답] ①
93. [정답] ③
94. [정답] ①
95. [정답] ⑤
96. [정답] ②
97. [정답] 444
98. [정답] ③
99. [정답] ③
100. [정답] 66
101. [정답] ⑤
102. [정답] ③
103. [정답] ④
104. [정답] 100
105. [정답] 93
106. [정답] ①
107. [정답] ①
108. [정답] $-2-\sqrt{3}$
109. [정답] ③
110. [정답] 69
111. [정답] ④
112. [정답] ③
113. [정답] 32
114. [정답] ①

115. [정답] ①
116. [정답] (1) 2 (2) 2 (3) 95 (4) 163
117. [정답] ⑤
118. [정답] ④
119. [정답] -6
120. [정답] ④
121. [정답] ②
122. [정답] ⑤
123. [정답] 5
124. [정답] ③
125. [정답] ②
126. [정답] $-\frac{9}{2}$
127. [정답] (1) 3 (2) 4 (3) 153
128. [정답] 890
129. [정답] 1
130. [정답] ③
131. [정답] $f(x)=-x^2-2x-2$
132. [정답] 5
133. [정답] ①
134. [정답] ②
135. [정답] ②
136. [정답] ①
137. [정답] ③
138. [정답] ②
139. [정답] ②
140. [정답] ③
141. [정답] 10
142. [정답] 82
143. [정답] $-\frac{5}{3} \leq k < 1$
144. [정답] -2
145. [정답] ④
146. [정답] ⑤
147. [정답] ④
148. [정답] ④
149. [정답] ②
150. [정답] ①
151. [정답] ⑤
152. [정답] ②
153. [정답] ⑤
154. [정답] ⑤
155. [정답] ③
156. [정답] 12
157. [정답] ③
158. [정답] ③
159. [정답] ①
160. [정답] -10
161. [정답] ⑤
162. [정답] ①
163. [정답] ②
164. [정답] ④
165. [정답] ①
166. [정답] ②
167. [정답] ③
168. [정답] ④
169. [정답] ①

170. [정답] 4
171. [정답] ③
172. [정답] ①
173. [정답] $\frac{37}{12}$
174. [정답] $k_1=4, \quad k_2=4, \quad k_3=\frac{41}{8}, \quad k_4=\frac{41}{8}, \quad k_5=\frac{57}{8},$
 $a=8, \quad b=-24$
175. [정답] ⑤
176. [정답] 44
177. [정답] ①
178. [정답] ⑤
179. [정답] $\frac{15}{4}$
180. [정답] ②
181. [정답] 47
182. [정답] ④
183. [정답] ②
184. [정답] ②
185. [정답] ③
186. [정답] (1) 해설참조 (2) 41
187. [정답] ①
188. [정답] ①
189. [정답] ③
190. [정답] (1) 해설참조 (2) $\left(1, -\frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{4}\right)$ (3) 1, 3
191. [정답] ④
192. [정답] ③
193. [정답] $a \geq 1$
194. [정답] ④
195. [정답] ②
196. [정답] 55
197. [정답] -8, -1, 1, 8
198. [정답] 0
199. [정답] ④
200. [정답] ②
201. [정답] 1



1. [정답] ①

[해설]

$x+y=3$, $x^2+y^2=7$ 에서 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로

$$7=3^2-2xy, \quad xy=1$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=3^3-3 \cdot 1 \cdot 3=18$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$$

$$=7^2-2 \cdot 1^2=47$$

$$\therefore x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-(xy)^3(x+y)$$

$$=(18 \cdot 47)-1^3 \cdot 3=843$$

2. [정답] ②

[해설]

$x \neq 0$ 이므로 $x^4-14x^2+1=0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2-14+\frac{1}{x^2}=0 \quad \therefore x^2+\frac{1}{x^2}=14$$

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=14$ 이므로

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=16 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4 \quad (\because x>0)$$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3 \times 4=52$ 이므로

$$x^3-2x^2-3x-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

$$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=52-2 \times 14-3 \times 4$$

$$=12$$

3. [정답] ④

[해설]

$a+b+c=1$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$$

$$ab+bc+ca=-4$$

..... ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=16$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=16-2abc$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2=\frac{3}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{16-2abc}{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

$$3(abc)^2+4abc-32=0$$

$$(3abc-8)(abc+4)=0$$

이때, $abc<0$ 이므로

$$\therefore abc=-4$$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=1$$

4. [정답] ①

[해설]

실수 x, y, z 가

$$x+y+z=1,$$

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=-1$$

을 만족시키므로

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=k \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$=x^2\left(k-\frac{1}{x}\right)+y^2\left(k-\frac{1}{y}\right)+z^2\left(k-\frac{1}{z}\right)$$

$$=k(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)=-1$$

$$k(x^2+y^2+z^2)=0$$

이때 $xyz \neq 0$ 이므로 $x^2+y^2+z^2>0$ 이고

$$\therefore k=0$$

따라서 ㉠에서 $xy+yz+zx=0$ 이므로

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=1$$

5. [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서

$$P(a, b, c)=ab+bc+ca-4=10$$

$$ab+bc+ca=14$$

조건 (나)에서

$$P(ab, ab, 1)+P(bc, bc, 1)+P(ca, ca, 1)$$

$$=a^2b^2+2ab+b^2c^2+2bc+c^2a^2+2ca-12$$

$$=164$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2(ab+bc+ca)=176$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=148$$

한편

$$(ab+bc+ca)^2$$

$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$$

이므로

$$2abc(a+b+c)=48$$

$$\therefore P(ab, bc, ca)=abc(a+b+c)-4=20$$

6. [정답] ①

[해설]

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \boxed{5} \\
 x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\
 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
 \text{이므로} \\
 x^3 + y^3 + z^3 \\
 &= (x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\} + 3xyz \\
 &= \boxed{41} \\
 x^5 + y^5 + z^5 \\
 &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) \\
 &\quad - \{x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x)\} \\
 &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) \\
 &\quad - \{x^2y^2(5-z) + y^2z^2(5-x) + z^2x^2(5-y)\} \\
 &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) \\
 &\quad - 5(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + xyz(xy+yz+zx) \\
 &= (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) \\
 &\quad - 5\{(xy+yz+zx)^2 - 2xyz(x+y+z)\} \\
 &\quad + xyz(xy+yz+zx) \\
 &= 15 \times 41 - 5(5^2 + 30) - 3 \times 5 \\
 &= \boxed{325} \\
 \text{이상에서 } a=325, b=5, c=41 \text{ 이므로} \\
 a-b-c &= 325-5-41=279
 \end{aligned}$$

7. [정답] ②

[해설]

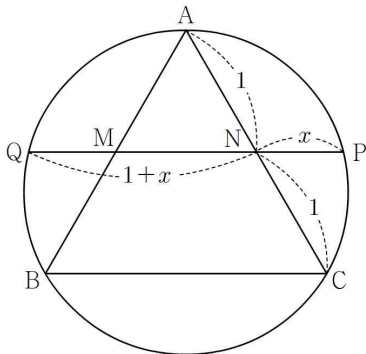
한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 변 AB, AC의 중점이 각각 M, N이다.

$$\overline{MN} = \overline{AN} = \overline{CN} = 1$$

접선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 N에 가까운 점이 P이고, M에 가까운 점을 Q라 하자.

$$\overline{NP} = x \text{ 이므로}$$

$$\overline{MQ} = x, \overline{NQ} = 1+x$$



$$\overline{AN} \times \overline{CN} = \overline{NP} \times \overline{NQ} \text{ 이므로}$$

$$1^2 = x(1+x), \quad x^2 + x - 1 = 0$$

양변을 x 로 나누면

$$x + 1 - \frac{1}{x} = 0, \quad x - \frac{1}{x} = -1$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = -4$$

8. [정답] ②

[해설]

$2x^4 + 4x^2 + 2x$ 를 $A(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$2x^4 + 4x^2 + 2x = A(x)Q(x) + 4x^2 - 3x$$

$$A(x)Q(x) = 2x^4 + 5x = x(2x^3 + 5)$$

이때 나머지가 이차식이고 몫이 1이 아니므로

$$A(x) = 2x^3 + 5$$

다항식 $A(x)$ 를 $B(x)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면

$$A(x) = B(x)Q'(x) + 3x + 5$$

$$B(x)Q'(x) = 2x^3 - 3x = x(2x^2 - 3)$$

이때 나머지가 일차식이고 몫이 1이 아니므로

$$B(x) = 2x^2 - 3$$

$$\begin{aligned} \therefore A(x) + xB(x) &= (2x^3 + 5) + x(2x^2 - 3) \\ &= 4x^3 - 3x + 5 \end{aligned}$$

9. [정답] ③

[해설]

$$f(x) = ax^m + \dots, g(x) = kx^n + \dots$$

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$Q(x) = g(x)h(x) + R(x) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

ㄱ. ㉠에서 $g(x)$ 와 $Q(x)$ 의 차수가 같으면 $R(x)$ 는 상수이다. (참)

ㄴ. [반례] ㉠에서 $f(x)$ 가 사차식, $g(x)$ 가 삼차식이고 $R(x)$ 가 이차식이라면 $f(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누었을 때의 나머지는 상수항이 된다. 즉 $R(x)$ 가 될 수 없다. (거짓)

ㄷ. ㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x)\{g(x)h(x) + R(x)\} + R(x) \\ &= \{g(x)\}^2 h(x) + R(x)\{g(x) + 1\} \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $\{g(x)\}^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)\{g(x) + 1\}$ 이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10. [정답] ②

[해설]

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \frac{1}{2}\{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\} \\ &= \frac{1}{2}(16 - 10) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\ 22 &= 4 \times (10 - 3) + 3xyz, \quad 3xyz = -6 \\ \therefore xyz &= -2 \end{aligned}$$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 x, y, z 는 t 에 대한 삼차방정식

$$t^3 - 4t^2 + 3t + 2 = 0$$

의 세 실근이다.

$$\begin{aligned} t^3 - 4t^2 + 3t + 2 &= (t-2)(t^2 - 2t + 1) \\ &= (t-2)(t^2 - 2t - 1) \end{aligned}$$



따라서 방정식 $t^3 - 4t^2 + 3t + 2 = 0$ 의 세 실근은 각각

$$x = 1, y = 1 - \sqrt{2}, z = 1 + \sqrt{2}$$

로 둘 수 있다.

$$\begin{aligned} \therefore x^6 + y^6 + z^6 &= 2^6 + (1 - \sqrt{2})^6 + (1 + \sqrt{2})^6 \\ &= 64 + (3 - 2\sqrt{2})^3 + (3 + 2\sqrt{2})^3 \\ &= 262 \end{aligned}$$

11. [정답] ②

[해설]

$x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ 에서 $2x - 1 = -\sqrt{3}$, 양변을 제곱하여 정리하면

$$2x^2 - 2x = 1, \quad x^2 = \frac{2x + 1}{2}$$

$$x^4 = \frac{4x^2 + 4x + 1}{4} = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2x + 1}{2} + x + \frac{1}{4} = 2x + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{4} - \sqrt{3} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{x^4} = \frac{4}{7 - 4\sqrt{3}} = 4(7 + 4\sqrt{3})$$

한편 $ax^5 + bx^4 = 1$, $x^4(ax + b) = 1$, $ax + b = \frac{1}{x^4}$ 에서 a , b 는 유

리수이므로 양변의 계수를 비교하면

$$ax + b = 4(7 + 4\sqrt{3})$$

$$\left(\frac{1}{2}a + b\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}a = 28 + 16\sqrt{3}$$

$$a = -32, b = 44$$

$y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $ay^5 + by^4 = 1$ 에서도 마찬가지로 계수를 비교하면

$a = -32$, $b = 44$ 를 얻는다.

$$\therefore a + b = 12$$

12. [정답] ⑤

[해설]

삼차다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 이다. $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) = x^3 - 9 + \frac{1}{x^3}$ 이 성립한다.

$$x - 3 + \frac{1}{x} = t$$

라 하면 $x + \frac{1}{x} = t + 3$

$$x^3 - 9 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 9$$

$$= (t + 3)^3 - 3(t + 3) - 9$$

$$= t^3 + 9t^2 + 24t + 9$$

$f(t) = t^3 + 9t^2 + 24t + 9$ 이므로

$$f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 9$$

$a = 9$, $b = 24$, $c = 9$ 이므로

$$b - a - c = 6$$

13. [정답] ⑤

[해설]

$f(x)$ 의 최고차항의 차수를 n 이라고 하면 좌변의 최고차항의 차수는 $2n$ 이고 우변의 최고차항의 차수는 $n + 2$ 이다. 좌변과 우변의 최고차항의 차수가 같아야 하므로

$$2n = n + 2, \quad n = 2$$

따라서 $f(x)$ 는 2차함수이므로 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$f(x^2 + x) = x^2 f(x) + 2x + 3$ 에서

$$a(x^2 + x)^2 + b(x^2 + x) + c = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x + 3$$

$$ax^4 + 2ax^3 + (a + b)x^2 + bx + c = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x + 3$$

양변의 계수를 비교하면 $2a = b$, $a + b = c$, $c = 3$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 이므로

$$f(0) + f(2) = 3 + 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 14$$

14. [정답] ②

[해설]

$x^3 + 3x - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1) + 3x = 0$ 의 근이 α 이므로

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha - 1) + 3\alpha = 0, \quad \alpha^3 - 1 = -3\alpha$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 1 = 0, \quad \alpha - 1 = -\alpha^3 - 2\alpha$$

$(\alpha^2 + \alpha + 1)P(\alpha) = 1$ 에서 $(\alpha^3 - 1)P(\alpha) = \alpha - 1$ 이므로

$$-3\alpha P(\alpha) = -\alpha^3 - 2\alpha, \quad P(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)$$

$$\therefore P(3) = \frac{11}{3}$$

15. [정답] ③

[해설]

다항식 $f(x) = a(x - 2)^3 + b(x - 2)^2 + c(x - 2) + d$ 를 $x - 12$ 로 나눈 나머지가 2023이므로 나머지정리에 의하여

$$f(12) = 2023$$

즉 $a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d = 2023$ 이므로

$$a = 2, b = 0, c = 2, d = 3$$

$$\therefore f(x) = 2(x - 2)^3 + 2(x - 2) + 3$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $x - 3$ 으로 나눈 나머지는 나머지정리에 의하여

$$\begin{aligned} f(3) &= 2 \times 1^3 + 2 \times 1 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

16. [정답] ③

[해설]

삼차식 $f(x)$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$, 나머지를 R 라고 하고, $(x + 1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지는

6- R이므로

$$f(x) = (x+1)Q_1(x) + R \quad (R \text{은 상수})$$

$$f(x) = (x+1)^2 Q_2(x) + 6 - R$$

위 두 식을 양변 더하면

$$2f(x) = (x+1)\{Q_1(x) + (x+1)Q_2(x)\} + 6$$

위 식의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) = R = 3$$

$$f(x) = (x+1)^3 Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)^3 Q_3(x) + a(x+1)^2 + 3$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = a(x+1)^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$a - b + c = 3$$

17. [정답] 94

[해설]

다항식 $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ 을 $(x^3 + x^2 + x + 1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = (x^3 + x^2 + x + 1)^2 Q(x) + R(x)$$

$$(x^8 + 1)(x^4 + 1) = (x^2 + 1)^2 (x + 1)^2 Q(x) + R(x)$$

$\dots\dots \textcircled{A}$

①에 $x = -1$ 을 대입하면

$$R(-1) = 4$$

①에 $x^2 = -1$, 즉 $x = i$ 또는 $x = -i$ 를 대입하면

$$R(i) = 4, \quad R(-i) = 4$$

다항식 $R(x) - 4$ 는 $x+1$, $x-i$, $x+i$ 로 나누어떨어지므로 $R(x)$

를 $x+1$, x^2+1 로 나누었을 때의 나머지는 모두 4이다.

$$R(x) = (x+1)(x^2+1)(ax^2+bx+c) + 4$$

라 하면 ①에서

$$(x^2+1)^2(x+1)^2 Q(x)$$

$$= x^{12} + x^8 + x^4 + 1 - (x+1)(x^2+1)(ax^2+bx+c) - 4$$

$$= (x^{12}-1) + (x^8-1) + (x^4-1)$$

$$- (x+1)(x^2+1)(ax^2+bx+c)$$

$$x^{12}-1 = (x^4-1)(x^8+x^4+1), \quad x^8-1 = (x^4-1)(x^4+1) \text{이므로}$$

$$(x^2+1)^2(x+1)^2 Q(x)$$

$$= (x^4-1)(x^8+2x^4+3) - (x+1)(x^2+1)(ax^2+bx+c)$$

$$= (x^2+1)(x+1)\{(x-1)(x^8+2x^4+3) - ax^2 - bx - c\}$$

따라서 다항식

$$(x-1)(x^8+2x^4+3) - ax^2 - bx - c \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

는 x^2+1 , $x+1$ 로 나누어떨어진다.

②에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-2(1+2+3) - a + b - c = 0, \quad b = a + c + 12$$

③에 $x = i$ 를 대입하면

$$(i-1)(i^8+2i^4+3) - ai^2 - bi - c = 0$$

$$6(i-1) + a - bi - c = 0, \quad (6-b)i + (a-c-6) = 0$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$6-b=0, \quad a-c-6=0, \quad b=6, \quad a-c=6$$

$$b = a + c + 12 \text{이므로} \quad a + c = -6$$

$$a + c = -6, \quad a - c = 6 \text{을 연립하면}$$

$$a = 0, \quad c = -6$$

$$R(x) = (x+1)(x^2+1)(6x-6) + 4 \text{이므로}$$

$$R(x) = 6(x^4-1) + 4$$

$$\therefore R(2) = 94$$

[다른 풀이]

$x^4-1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$ 이므로 x^4-1 은 x^3+x^2+x+1 을 인수로 갖는다.

$$x^{12} + x^8 + x^4 + 1$$

$$= (x^{12}-1) + (x^8-1) + (x^4-1) + 4$$

$$= (x^4-1)(x^8+x^4+1) + (x^4-1)(x^4+1) + (x^4-1) + 4$$

$$= (x^4-1)(x^8+2x^4+3) + 4$$

$$= (x^4-1)\{(x^8-1) + 2(x^4-1) + 6\} + 4$$

$$= (x^4-1)^2\{(x^4+1) + 2\} + 6(x^4-1) + 4$$

$$= (x^4-1)^2(x^4+3) + 6x^4 - 2$$

따라서 $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ 을 $(x^4-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$6x^4-2$ 이고, $6x^4-2$ 는 삼차다항식이므로 $x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ 을

$(x^4-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지와 $(x^3+x^2+x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 같다.

$$\text{따라서 } R(x) = 6x^4 - 2 \text{이므로} \quad R(2) = 94$$

18. [정답] ④

[해설]

삼차다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 8이므로

$$f(x) = (x+1)Q(x) + 8, \quad f(-1) = 8$$

삼차다항식 $f(x-2)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $ax+2$ 이므로 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

$$f(x-2) = (x-1)^2 Q_2(x) + ax + 2$$

이 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(-1) = a + 2, \quad 8 = a + 2$$

$$\therefore a = 6$$

이때 $Q(x) = kx^2 + mx + n$ ($k \neq 0$, m , n 은 상수)라 하면

$$f(x) = (x+1)(kx^2 + mx + n) + 8$$

$$= kx^3 + (k+m)x^2 + (m+n)x + n + 8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 다항식 $3Q(x) - 2$ 는

$$3Q(x) - 2 = 3kx^2 + 3mx + 3n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이므로 ①을 ②으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한다.

$$\begin{array}{r} \frac{\frac{1}{3}x}{3kx^2+3mx+3n-2} + \frac{\frac{1}{3}}{3kx^2+3mx+3n-2} \\ \hline \frac{kx^3 + (k+m)x^2 + (m+n)x + n + 8}{kx^3 + \left(n - \frac{2}{3}\right)x} \\ \hline \frac{kx^2 + \left(m + \frac{2}{3}\right)x + n + 8}{kx^2 + \left(m + \frac{2}{3}\right)x + n + 8} \\ \hline \frac{kx^2}{\frac{2}{3}x} + \frac{mx + n - \frac{2}{3}}{\frac{26}{3}} \\ \hline \frac{2}{3}x + \frac{26}{3} \end{array}$$

$$\therefore h(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}x + \frac{26}{3}\right) = x + 9$$



따라서 다항식 $h(x)-a$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $h(1)-a$ 와 같으므로
 $(1+9)-6=4$

19. [정답] ⑤

[해설]

$f(0)=2$ 일 때, 조건 (나)에서 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(1)=f(0)+1, f(2)=f(1)+3$$

$$\therefore f(1)=3, f(2)=6$$

$f(x)$ 를 x^2-3x+2 , 즉 $(x-2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=1$, $x=2$ 를 각각 대입하면

$$f(1)=a+b, f(2)=2a+b$$

$$\therefore a+b=3, 2a+b=6$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=0$

따라서 $R(x)=3x$ 이므로

$$R(5)=15$$

20. [정답] ③

[해설]

$$f(x)=(x-3)Q(x)+R \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이고, $Q(x)$ 를 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면

$$Q(x)=(x-3)Q_1(x)+\frac{2}{R}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-3)\left\{(x-3)Q_1(x)+\frac{2}{R}\right\}+R \\ &= (x-3)^2Q_1(x)+\frac{2}{R}(x-3)+R \quad \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

ㄱ. ㉠에서 x 에 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x+1)=(x-2)Q(x+1)+R$$

이므로 $f(x+1)$ 을 $x-2$ 로 나눈 나머지는 R 이다.
(참)

ㄴ. ㉡에서 x 에 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x+1)=(x-2)^2Q_1(x+1)+\frac{2}{R}(x-2)+R \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이므로 $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나눈 나머지는

$$\frac{2}{R}(x-3)+R$$

$f(x+1)$ 을 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는

$$\frac{2}{R}(x-2)+R$$

이므로 $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나눈 나머지와 $f(x+1)$ 을 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 다르다. (거짓)

ㄷ. ㉢에서 $\frac{2}{R}(x-2)+R=k$ 라 하면

$$\begin{aligned} \{f(x+1)\}^2-R^2 &= (x-2)^4\{Q_1(x+1)\}^2 \\ &\quad +2k(x-2)^2Q_1(x+1)+k^2-R^2 \end{aligned}$$

곧, k^2-R^2 을 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지만 생각하면 된다.

$$k^2-R^2=\frac{4}{R^2}(x-2)^2+4(x-2)$$

이므로 나머지는 $4(x-2)=4x-8$ 이다. (참)
 이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. [정답] ①

[해설]

다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$$f(x)=(x-1)Q(x)+2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 3이므로

$$Q(x)=(x-1)Q_1(x)+3$$

㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\{(x-1)Q_1(x)+3\}+2 \\ &= (x-1)^2Q_1(x)+3(x-1)+2 \\ &= (x-1)^2Q_1(x)+3x-1 \end{aligned}$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x-1$ 이다.

한편 다항식 $\{f(x)\}^2$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 &= (x-1)^4\{Q_1(x)\}^2+(3x-1)\{(x-1)^2Q_1(x)\} \\ &\quad + (3x-1)^2 \\ &= (x-1)^2Q_2(x)+9x^2-6x+1 \\ &= (x-1)^2Q_2(x)+9(x-1)^2+12x-8 \end{aligned}$$

따라서 다항식 $\{f(x)\}^2$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지는 $R(x)=12x-8$ 이므로

$$R(2)=24-8=16$$

22. [정답] 9

[해설]

다항식 $x^n(x^2+ax+b)$ 을 $(x-3)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3^{n+1}(x-3)$ 이므로

$$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^{n+1}(x-3) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이 식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^n(3^2+3a+b)=0, \quad 3a+b=-9 \quad (\because 3^n>0)$$

$$\therefore b=-3a-9$$

㉠의 식에 $b=-3a-9$ 를 대입하면

$$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^{n+1}(x-3),$$

$$x^n(x-3)(x+3+a)=(x-3)^2Q(x)+3^{n+1}(x-3)$$

즉 $x^n(x+3+a)=(x-3)Q(x)+3^{n+1}$ 이므로 이 식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$3^n(a+6)=3^{n+1}, \quad a+6=3$$

$$\therefore a=-3, b=0$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2 &= (-3)^2+0^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

23. [정답] ①

[해설]

다항식 $P(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $4x+4$ 이고, 몫을 $Q_1(x)$ 라 하자.

$$P(x) = (x-2)^2 Q_1(x) + 4x + 4$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2) = 12$$

$P(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 이라 하자.

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + R(x)$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2) = R(2) \quad \therefore R(2) = 12$$

[다른 풀이]

다항식 $P(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 이라 하자.

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + R(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$P(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 x^2+3x+1 이고, 몫을 $Q_1(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^3 Q_1(x) + x^2 + 3x + 1 \\ &= (x-1)^3 Q_1(x) + (x-1)^2 + 5x \end{aligned}$$

$P(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $5x$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $R(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $5x$ 이다.

$$R(x) = a(x-1)^2 + 5x$$

라 하면 $\textcircled{1}$ 에 의하여

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + a(x-1)^2 + 5x \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이다.

다항식 $P(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $4x+4$ 이고, 몫을 $Q_2(x)$ 라 하자.

$$P(x) = (x-2)^2 Q_2(x) + 4x + 4$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2) = 12$$

$\textcircled{2}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2) = a + 10, \quad a + 10 = 12, \quad a = 2$$

$$\therefore R(x) = 2(x-1)^2 + 5x$$

따라서 $R(2) = 12$ 이다.

24. [정답] ③

[해설]

$P(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $3x^2-2x+30$ 이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^3 Q_1(x) + 3x^2 - 2x + 30 \\ &= (x-1)^2(x-1)Q_1(x) + 3(x-1)^2 + 4x \\ &= (x-1)^2 \{ (x-1)Q_1(x) + 3 \} + 4x \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지는 $4x$ 이다.

한편, $P(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 $P(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나눈 나머지는 $4x$ 이므로

$$P(x) = (x-1)^2(x-2)Q_2(x) + a(x-1)^2 + 4x \quad (a \text{는 상수})$$

..... ④

이때 $P(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $13x-14$ 이므로 $\textcircled{4}$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) = a + 8 = 12 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $P(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는

$$\begin{aligned} R(x) &= 4(x-1)^2 + 4x \\ \therefore R(-1) &= 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

25. [정답] 595

[해설]

다항식 $P(x)$ 를 $(x+1)^3$, $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 각각 $2x^2+1$, $24x^2-32x+19$ 이고, 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^3 Q_1(x) + 2x^2 + 1 \\ P(x) &= (x-1)^3 Q_2(x) + 24x^2 - 32x + 19 \end{aligned}$$

두 항등식에 각각 $x=-1$, $x=1$ 을 대입하면

$$P(-1) = 3, \quad P(1) = 11$$

다항식 $P(x)$ 를 $(x+1)^3(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 라 하자.

$$P(x) = (x+1)^3(x-1)^3 Q(x) + R(x)$$

$x=-1$, $x=1$ 을 각각 대입하면

$$\begin{aligned} P(-1) &= R(-1), \quad P(1) = R(1) \\ \therefore R(-1) &= 3, \quad R(1) = 11 \end{aligned}$$

따라서 $R(x)$ 를 $(x+1)^3$, $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 각각 $2x^2+1$, $24x^2-32x+19$ 이다.

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+1)^3(ax^2+bx+c) + 2x^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ R(x) &= (x-1)^3(ax^2+dx+e) + 24x^2 - 32x + 19 \end{aligned}$$

라 하자. 다항식 $R(x)$ 의 상수항은

$$\begin{aligned} c + 1 &= -e + 19, \quad e = 18 - c \\ R(x) &= (x-1)^3(ax^2+dx+18-c) + 24x^2 - 32x + 19 \end{aligned}$$

..... ②

$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 에 의하여 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $R(x)$ 의 x^4 의 계수는

$$b + 3a = d - 3a, \quad d = 6a + b$$

$R(1) = 11$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$R(1) = 8(a+b+c) + 3 = 11, \quad a+b+c = 1$$

$R(-1) = 3$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} R(-1) &= -8(a-d+18-c) + 75 = 3 \\ a-d-c &= -9 \end{aligned}$$

$d = 6a + b$ 이므로 $a-d-c = -9$ 에서

$$-5a-b-c = -9, \quad 5a+b+c = 9$$

$a+b+c = 1$, $5a+b+c = 9$ 를 연립하면

$$a = 2, \quad b+c = -1$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $R(x)$ 의 x 의 계수는

$$\begin{aligned} 3c+b &= 3e-d-32 \\ 3c+b &= 3(18-c)-(6a+b)-32, \quad b+3c = 5 \end{aligned}$$

$b+c = -1$, $b+3c = 5$ 을 연립하면

$$b = -4, \quad c = 3$$

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+1)^3(2x^2-4x+3) + 2x^2 + 1 \text{이므로} \\ R(3) &= 595 \end{aligned}$$



[다른 풀이]

다항식 $P(x)$ 를 $(x+1)^3$, $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 각각 $2x^2+1$, $24x^2-32x+19$ 이고, 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ 라 하면

$$P(x) = (x+1)^3 Q_1(x) + 2x^2 + 1$$

$$P(x) = (x-1)^3 Q_2(x) + 24x^2 - 32x + 19$$

다항식 $P(x)$ 를 $(x+1)^3(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$P(x) = (x+1)^3(x-1)^3 Q(x) + R(x)$$

$R(x)$ 를 $(x+1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x^2+1$ 이고, 몫은 이차 이하의 다항식이므로 몫을

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면

$$R(x) = (x+1)^3 \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + 2x^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

또한, $R(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $24x^2-32x+19$ 이므로 $\textcircled{\text{㉠}}$ 에서

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-1+2)^3 \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + 2x^2 + 1 \\ &= \{(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8\} \\ &\quad \times \{a(x-1)^2 + b(x-1) + c\} + 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

위의 식을 정리해서 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-1)^3 Q'(x) + (8a+12b+6c)(x-1)^2 \\ &\quad + (8b+12c)(x-1) + 8c + 2x^2 + 1 \\ \therefore (8a+12b+6c)(x-1)^2 + (8b+12c)(x-1) + 8c \\ &\quad + 2x^2 + 1 = 24x^2 - 32x + 19 \\ (8a+12b+6c)(x-1)^2 + (8b+12c)(x-1) + 8c \\ &= 22x^2 - 32x + 18 = 22(x-1)^2 + 12(x-1) + 8 \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$8a+12b+6c=22, \quad 8b+12c=12, \quad 8c=8$$

따라서 $a=2, b=0, c=1$ 이므로

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+1)^3 \{2(x-1)^2 + 1\} + 2x^2 + 1 \\ \therefore R(3) &= 64 \times 9 + 19 = 595 \end{aligned}$$

26. [정답] ③

[해설]

다항식 $P(x)$ 를 $(x^2+3)(x^2+x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수)라 하면

$$P(x) = (x^2+3)(x^2+x+1)Q(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

다항식 $P(x)$ 를 x^2+3 으로 나누었을 때의 나머지는 $x-2$ 이므로 $R(x)$ 를 x^2+3 으로 나누었을 때의 나머지도 $x-2$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x^2+3)(x+k) + (x-2) \\ &= ax^2 + akx^2 + (3a+1)x + 3ak - 2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}} \end{aligned}$$

다항식 $P(x)$ 를 x^2+x+1 으로 나누었을 때의 나머지는 $2x+1$ 이므로 $R(x)$ 를 x^2+x+1 으로 나누었을 때의 나머지도 $2x+1$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x^2+x+1)(x+m) + 2x+1 \\ &= a(x^2+x+1)(x+m) + 2x+1 \end{aligned}$$

$$= ax^3 + a(m+1)x^2 + (am+a+2)x + am+1 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

식 $\textcircled{\text{㉠}}$ 과 식 $\textcircled{\text{㉡}}$ 은 같은 식이므로

$$k=m+1, \quad 2a-1=am, \quad 3ak=am+3$$

즉 $3a(m+1)=am+3$ 과 $2a-1=am$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{5}{7}, \quad m = \frac{3}{5}, \quad k = \frac{8}{5}$$

$$\therefore R(x) = \frac{5}{7}(x^2+3)\left(x+\frac{8}{5}\right) + (x-2)$$

$$\therefore R(1) = \frac{45}{7}$$

27. [정답] ①

[해설]

다항식 $f(x)$ 를 x^3-1 로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 이라 하자.

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)Q(x) + R(x)$$

$f(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때의 나머지가 $2x+2$ 이다. 따라서 $R(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누었을 때의 나머지가 $2x+2$ 이다. $R(x)$ 는 이차 이하의 다항식이므로

$$R(x) = a(x^2+x+1) + 2x+2$$

라 하자.

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)Q(x) + a(x^2+x+1) + 2x+2$$

$f(1)=4$ 이므로

$$f(1) = 3a+4, \quad a=0$$

$$\therefore R(x) = 2x+2$$

따라서 $R(2)=6$ 이다.

28. [정답] ⑤

[해설]

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 x^2+x+1 이고, 몫을 $Q_1(x)$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^3 Q_1(x) + x^2 + x + 1 \\ &= (x-1)^3 Q_1(x) + (x-1)^2 + 3x \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $3x$ 이다.

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 9이므로

$$f(2) = 9$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$ 이고, 몫을 $Q(x)$ 라 하자.

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + R(x)$$

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3x$ 이므로 $R(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $3x$ 이다.

$$R(x) = a(x-1)^2 + 3x$$

$f(x) = (x-1)^2(x-2)Q(x) + a(x-1)^2 + 3x$ 에서 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) = a+6$$

$$f(2) = 9 \text{이므로} \quad a=3$$

$$\therefore R(x) = 3(x-1)^2 + 3x$$

따라서 $R(-1)=9$ 이다.

29. [정답] 7

[해설]

다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x^2+3x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3 Q(x) + 2x^2 + 3x + 1 \\ &= (x-2)^2(x-2)Q(x) + 2(x-2)^2 + 11x - 7 \\ &= (x-2)^2\{(x-2)Q(x) + 2\} + 11x - 7 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}} \end{aligned}$$

또 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $3x+12$ 이므로

$$f(x) = (x+1)^2 Q_1(x) + 3x + 12 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

이때 다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2(x+1)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-2)^2(x+1)Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$

㉠에서 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $11x-7$ 이므로 ax^2+bx+c 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $11x-7$ 이다.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2(x+1)Q_3(x) + a(x-2)^2 + 11x - 7 \\ &\quad \dots\dots \textcircled{\text{㉢}} \end{aligned}$$

이고 ㉡에서 $f(-1)=9$ 이므로 ㉢의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(-1) = 9a - 18 = 9, \quad a = 3$$

따라서 $R(x) = 3(x-2)^2 + 11x - 7$ 이므로

$$R(1) = 7$$

30. [정답] ④

[해설]

삼차다항식 $f(x)$ 를 $5x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (5x-1)Q(x) + R \\ &= \left(x - \frac{1}{5}\right)5Q(x) + R \\ &= \left(x - \frac{1}{5}\right)\frac{5}{2}\{2Q(x)-3\} + \frac{15}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right) + R \\ &= \{2Q(x)-3\}P(x) + g(x) \end{aligned}$$

이 식에서 $2Q(x)-3$ 이 이차식이므로 다항식 $f(x)$ 를 $2Q(x)-3$ 로 나누었을 때의 몫 $P(x)$ 와 나머지 $g(x)$ 는 각각

$$P(x) = \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right), \quad g(x) = \frac{15}{2}\left(x - \frac{1}{5}\right) + R$$

이므로

$$P(1)+g(5)-R = 2+36+R-R = 38$$

31. [정답] ⑤

[해설]

최고차항의 계수가 1인 사차식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2 Q(x) + R(x) \\ &= \frac{1}{3}(x+1)^2\{3Q(x)-2\} + \frac{2}{3}(x+1)^2 + R(x) \end{aligned}$$

이때 $Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로 $3Q(x)-2$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차식이다.

$R(x)$ 는 일차식이므로 $\frac{2}{3}(x+1)^2 + R(x)$ 은 최고차항의 계수가 $\frac{2}{3}$

인 이차식이고 이 식을 $3Q(x)-2$ 로 나눌 때의 몫은 $\frac{2}{9}$ 이다.

즉 $f(x)$ 를 $3Q(x)+2$ 로 나누었을 때의 몫인 $g(x)$ 는

$$g(x) = \frac{1}{3}(x+1)^2 + \frac{2}{9}$$

따라서 다항식 $g(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $g(2)$ 다.

$$\begin{aligned} \therefore g(2) &= \frac{1}{3}(2+1)^2 + \frac{2}{9} \\ &= \frac{29}{9} \end{aligned}$$

32. [정답] ③

[해설]

삼차다항식 $f(x)$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지는 R 이므로

$$f(x) = (x-3)Q(x) + R$$

$Q(x)$ 는 이차다항식이므로 $Q(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, b, c$ 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)(ax^2 + bx + c) + R \\ &= ax^3 + (-3a+b)x^2 + (c-3b)x - 3c + R \end{aligned}$$

이때 $4Q(x)-3 = 4(ax^2 + bx + c) - 3 = 4ax^2 + 4bx + 4c - 3$ 이므로 다항식 $f(x)$ 를 $4Q(x)-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해보면

$$\begin{array}{r} \frac{\frac{1}{4}x}{4ax^2+4bx+4c-3} - \frac{\frac{3}{4}}{ax^3 + bx^2 + \left(c - \frac{3}{4}\right)x} \\ \hline \frac{ax^3 + (-3a+b)x^2 + (c-3b)x - 3c + R}{-3ax^2 + \left(-3b + \frac{3}{4}\right)x - 3c + R} \\ \hline \frac{-3ax^2 \quad -3bx - 3c + \frac{9}{4}}{\frac{3}{4}x + R - \frac{9}{4}} \end{array}$$

이때 몫은 $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$ 이고 나머지는 $\frac{3}{4}x + R - \frac{9}{4}$ 이므로

$$g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x + R - \frac{9}{4} = x + R - 3$$

따라서 $g(x) - R = x - 3$ 이므로 $x-12$ 로 나누었을 때의 나머지는 $g(12) - R = 12 - 3 = 9$

33. [정답] $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

[해설]

$$f(x) = (x-1)Q_1(x) + f(1)$$

$$f(x) = (x-2)Q_2(x) + f(2) \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

에서 ㉠에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = -Q_2(1) + f(2)$

조건 (가)에서 $Q_2(1) = f(2)$ 이므로 $f(1) = 0$

$$\therefore f(x) = x^2 + ax + b = (x-1)(x-b), \quad Q_1(x) = x-b$$

