2023년 기출 19문항

Infinite

01-1

▶ 2023년 교육청 고2 공통 11월 29번

두 상수 a, b $(0 \le b \le \pi)$에 대하여 $\frac{\pi}{2} \le x \le a$에서 함수 $f(x) = 2\cos(3x + b)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 $-\sqrt{3}$이다. $a \times b = \frac{q}{p}\pi^2$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

01-2

▶ 변형문항

두 상수 a, b $(0 \le b \le \pi)$에 대하여 $a \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x) = 4\sin(2x + b)$의 최댓값은 $2\sqrt{3}$이고 최솟값은 -2이다. $a \times b = \frac{q}{p}\pi^2$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

02-1

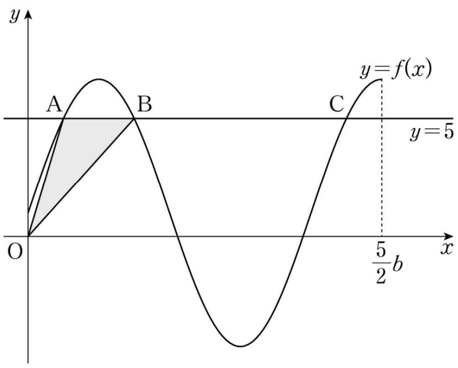
▶ 2023년 교육청 고3 공통 10월 공통범위 11번

그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1 \ \left(0 \le x \le \frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은?

(단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.)



① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

02-2

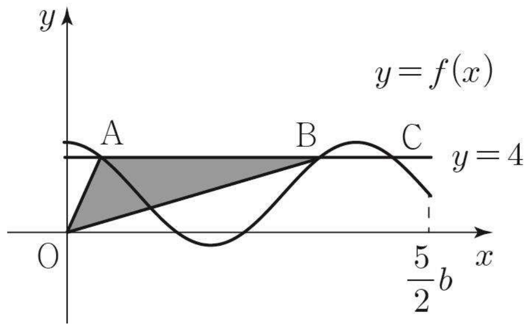
▶ 변형문항

그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos\frac{\pi x}{b}+2 \ \left(0 \le x \le \frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}+8$이고 삼각형 AOB의 넓이가 24일 때, a^2+b^2의 값은?

(단, $a>3$, $b>0$이고, O는 원점이다.)



① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

03-1

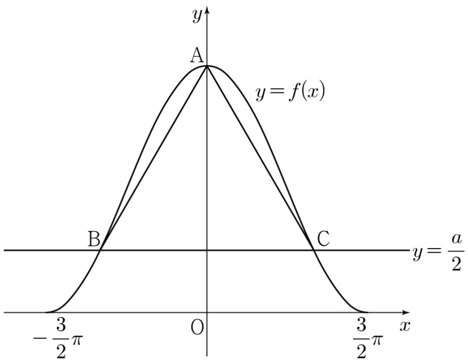
▶ 2023년 교육청 고2 공통 6월 15번

$-\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=a\cos\frac{2}{3}x+a\ \ (a>0)$$

이 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 직선 $y=\frac{a}{2}$와 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{12}\pi$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$



03-2

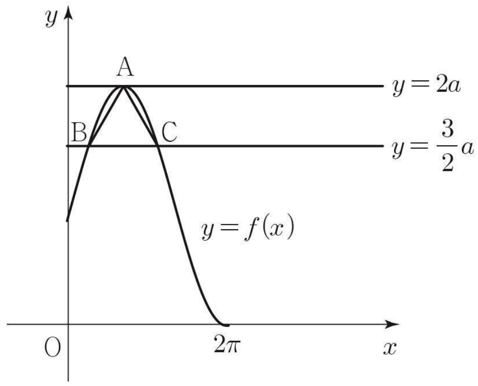
▶ 변형문항

$0 \leq x \leq 2\pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=a\sin\frac{3}{4}x+a\ \ (a>0)$$

이 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2a$와 만나는 점을 A, 직선 $y=\frac{3}{2}a$와 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은?

① $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{9}\pi$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{9}\pi$ ⑤ $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$



04-1 ▶ 2023년(2024학년도) 사관학교 고3 공통 7월 공통범위 21번

두 양수 a, b에 대하여 두 함수

$$y=3a\tan bx,\ y=2a\cos bx$$

의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 크고 $\frac{5\pi}{2b}$보다 작은 세 점을 x좌표가 작은 점부터 x좌표의 크기순으로 A_1, A_2, A_3이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$을 지름으로 하는 원이 점 A_2를 지나고 이 원의 넓이가 π일 때, $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

04-2 ▶ 변형문항

두 양수 a, b에 대하여 두 함수

$$y=\sqrt{3}a\tan bx,\ y=2a\sin bx$$

의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 0보다 크고 $\frac{5\pi}{2b}$보다 작은 5개의 점을 x좌표가 작은 점부터 x좌표의 크기순으로 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_5$을 지름으로 하는 원이 점 A_3를 지나고 이 원의 넓이가 4π일 때, $\left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

05-1

▶ 2023년(2024학년도) 경찰대학 고3공통 7월 20번

$0 \le x < 2\pi$일 때, 함수

$$f(x)=2\cos^2 x-|1+2\sin x|-2|\sin x|+2$$

에 대하여 집합

$$A=\{x \mid f(x)\text{의 값은 } 0 \text{ 이하의 정수}\}$$

라 하자. 집합 A의 원소의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

05-2

▶ 변형문항

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 함수

$$f(x)=\sin^2 x-|1+2\cos x|-3|\cos x|+1$$

에 대하여 집합

$$A=\{x \mid f(x)\text{의 값은 } |f(x)|\text{의 값이 홀수인 정수}\}$$

라 하자. 집합 A의 원소의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

06-1

▶ 2023년 교육청 고2 공통 6월 21번

자연수 n에 대하여 $\frac{n-1}{6}\pi \leq x \leq \frac{n+2}{6}\pi$에서 함수

$$f(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 40 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 115　② 117　③ 119　④ 121　⑤ 123

06-2

▶ 변형문항

자연수 n에 대하여 $\frac{n-1}{3}\pi \leq x \leq \frac{n+2}{3}\pi$에서 함수

$$f(x)=\left|\cos \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 20 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 42　② 43　③ 44　④ 45　⑤ 46

07-1

▶ 2023년 교육청 고2 공통 6월 28번

자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 4$일 때, x에 대한 방정식

$$\sin \pi x - \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

의 모든 실근의 합을 $f(n)$이라 하자.
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값을 구하시오.

07-2

▶ 변형문항

자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 2$일 때, x에 대한 방정식

$$\cos 2\pi x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

의 모든 실근의 합을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} f(n)$의 값을 구하시오.

08-1

▶ 2023년 교육청 고3공통 3월 공통범위 13번

두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.)

(가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
(나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

08-2

▶ 변형문항

두 함수

$$f(x)=3x^2+ax+b,\ g(x)=\cos x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

(단, a, b는 상수이고, $0 < a < 4$이다.)

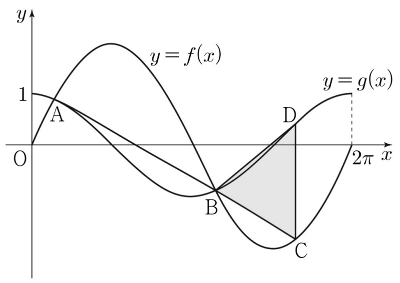
(가) $\left\{g\left(\frac{a}{2}\pi\right)\right\}^2=1$
(나) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5}{2}\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 5π이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

09-1

▶ 2023년 교육청 고3 공통 4월(5/10시행) 공통범위 13번

다음 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x) = k\sin x$, $g(x) = \cos x$에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y = f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y = g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)

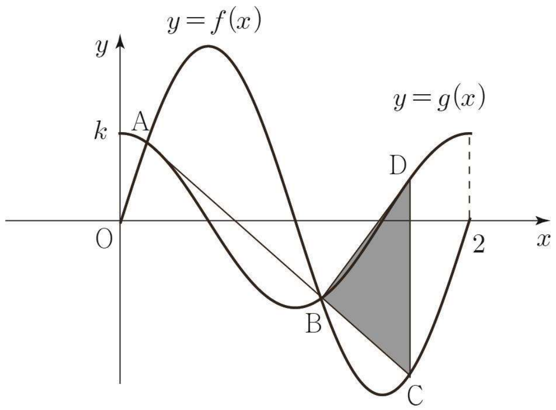


① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$　② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$　③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

09-2

▶ 변형문항

다음 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2]$에서 정의된 두 함수 $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = k\cos \pi x$에 대하여 곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y = f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y = g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이를 S라고 할 때, $\frac{S}{k}$의 값을 구하여라? (단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)



① $\frac{\sqrt{15}}{8}$　② $\frac{9\sqrt{5}}{40}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

10-1

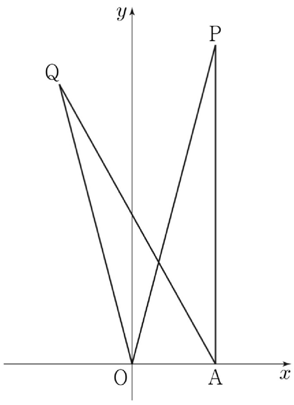
▶ 2023년 교육청 고3 공통 4월(5/10시행) 공통범위 21번

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(2, 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



10-2

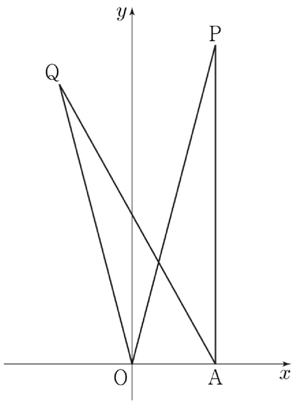
▶ 변형문항

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{15}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
>
> (나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오.

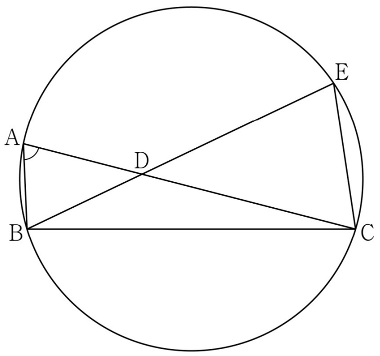
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



11-1

▶ 2023년 교육청 고2 공통 9월 28번

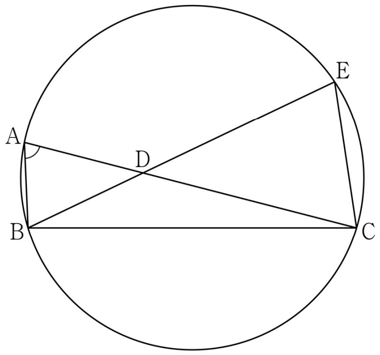
그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{\sqrt{3}}{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{DE}}=5$, $\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{CE}}=5\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



11-2

▶ 변형문항

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{\mathrm{DE}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{CE}}=10$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



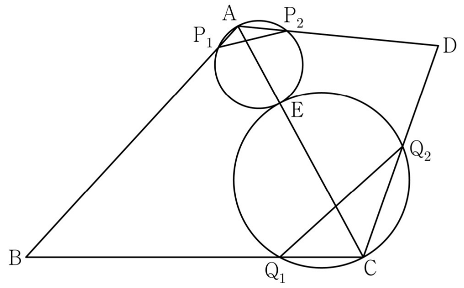
12-1

▶ 2023년(2024학년도) 평가원 고3 공통 6월 공통범위 13번

그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$이다.)



① $\sqrt{21}$　② $\sqrt{22}$　③ $\sqrt{23}$
④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

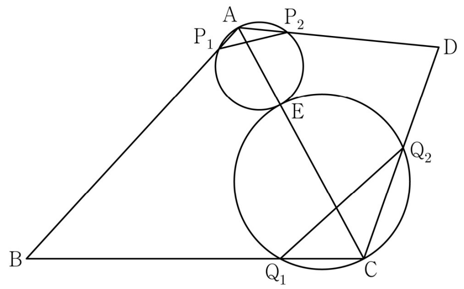
12-2

▶ 변형문항

그림과 같이

$$\overline{BC}=4,\ \overline{CD}=3,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{4},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:2\sqrt{15}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 3일 때, $(\overline{AB}+\overline{AD})^2$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$이다.)



① $47-\sqrt{7}$　② $47-2\sqrt{7}$　③ $47-3\sqrt{7}$
④ $47-4\sqrt{7}$　⑤ $47-5\sqrt{7}$

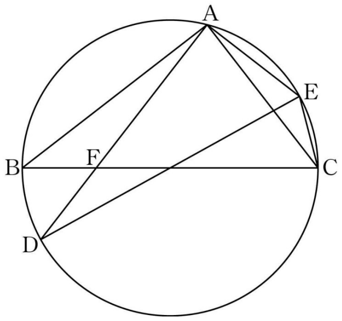
13-1

▶ 2023년 교육청 고3 공통 10월 공통범위 21번

그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=4,\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}},\ \sin(\angle\mathrm{CAE})=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{\mathrm{AF}}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오.



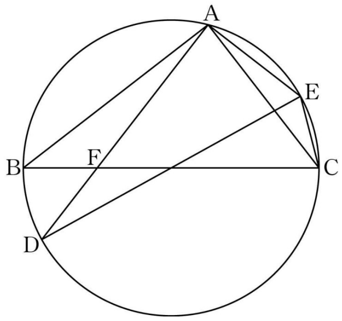
13-2

▶ 변형문항

그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=5,\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}},\ \sin(\angle\mathrm{CAE})=\frac{1}{5}$$

이다. $\overline{\mathrm{AF}}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오.



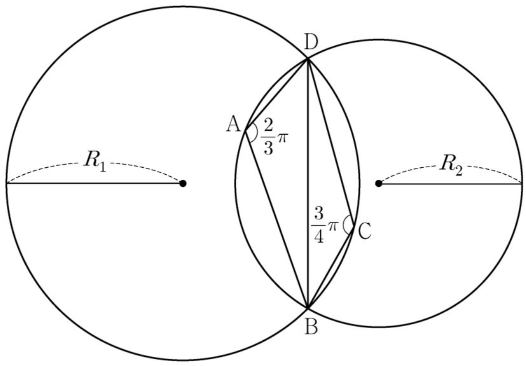
14-1

▶ 2023년(2024학년도) 평가원 고3 통 9월 공통범위 20번

그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_2=\boxed{(가)}\times\overline{BD}$$
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\ \boxed{(나)}\ )$$
> 이므로
> $$R_1\times R_2=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오.

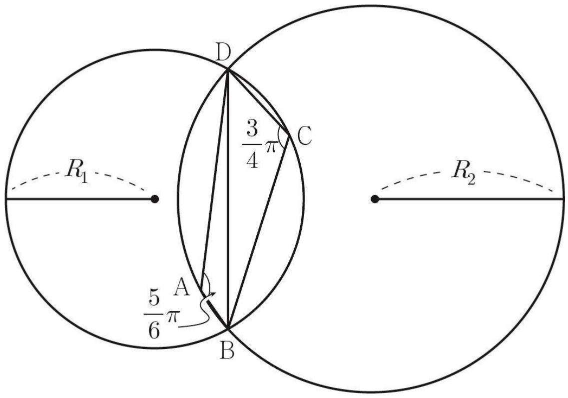
14-2

▶ 변형문항

그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\ \overline{AD}=3\sqrt{3},\ \angle DAB=\frac{5}{6}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

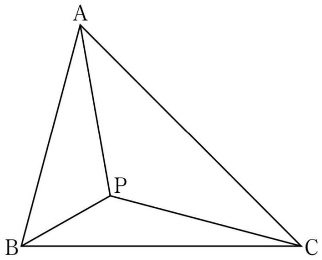
> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $$R_2=\boxed{(가)}\times\overline{BD}$$
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $$\overline{BD}^2=3^2+(3\sqrt{3})^2-(\ \boxed{(나)}\ )$$
> 이므로
> $$R_1\times R_2=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $-2\times\frac{r^2}{pq}$의 값을 구하시오.

15-1

▶ 2023년 교육청 고3 통 3월 공통범위 11번

그림과 같이 $\angle BAC=60°$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC=30°$, $\angle PCB=15°$일 때, 삼각형 APC의 넓이는?



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$　② $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4}$　③ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

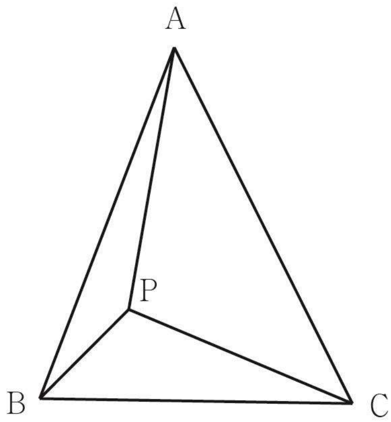
④ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$　⑤ $2+\sqrt{3}$

15-2

▶ 변형문항

그림과 같이 $\angle BAC=45°$, $\overline{AB}=2\sqrt{6}$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC=45°$, $\angle PCB=15°$일 때, 삼각형 APC의 넓이는?

(단, $C<90°$이다.)



① $4+\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　② $4+\sqrt{3}$　③ $4+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

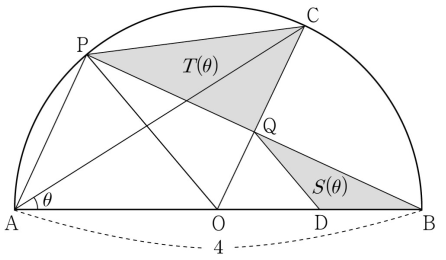
④ $4+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$　⑤ $4+2\sqrt{3}$

16-1

▶ 2023년 교육청 고2 통 6월 19번

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 A를 지나고 선분 OC와 평행한 직선과 호 AB의 교점을 P, 선분 OC와 선분 BP의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 선분 PO와 평행한 직선과 선분 OB의 교점을 D라 하자. $\angle CAB=\theta$라 할 때, 삼각형 QDB의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 PQC의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. 다음은 $S(\theta)$와 $T(\theta)$를 구하는 과정이다.

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\text{이다.}\right)$



> $\angle CAB=\theta$이므로 $\angle COB=2\theta$이다.
>
> 삼각형 POB가 이등변삼각형이고 $\angle OQB=\frac{\pi}{2}$이므로 점 Q는 선분 PB의 중점이고 $\angle POQ=2\theta$이다. 선분 PO와 선분 QD가 평행하므로 삼각형 POB와 삼각형 QDB는 닮음이다.
>
> 따라서 $\overline{QD}=\boxed{(가)}$이고 $\angle QDB=\boxed{(나)}$이므로
>
> $$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\boxed{(가)}\times 1\times sin(\boxed{(나)})$$
>
> 이다. $\overline{CQ}=\overline{CO}-\overline{QO}$이므로
>
> $$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\sin 2\theta\times(2-\boxed{(다)})$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 할 때, $p\times f\left(\frac{\pi}{16}\right)\times g\left(\frac{\pi}{8}\right)$의 값은?

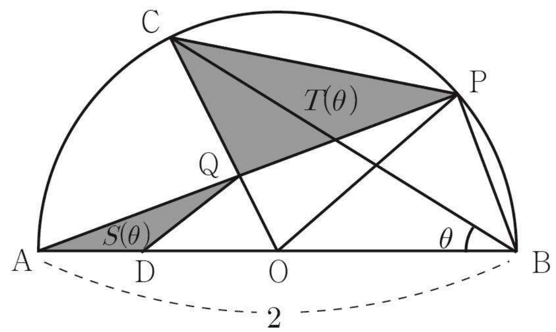
① $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$
④ $\frac{\sqrt{2}}{7}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

16-2

▶ 변형문항

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 점 C에 대하여 점 B를 지나고 선분 OC와 평행한 직선과 호 AB의 교점을 P, 선분 OC와 선분 AP의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 선분 PO와 평행한 직선과 선분 OA의 교점을 D라 하자. $\angle CBA=\theta$라 할 때, 삼각형 QDA의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 PQC의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. 다음은 $S(\theta)$와 $T(\theta)$를 구하는 과정이다.

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{4}\text{이다.}\right)$



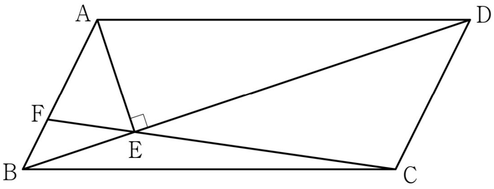
> $\angle CBA=\theta$이므로 $\angle COA=2\theta$이다.
>
> 삼각형 POA가 이등변삼각형이고 $\angle OQA=\frac{\pi}{2}$이므로 점 Q는 선분 PA의 중점이고 $\angle POQ=2\theta$이다. 선분 PO와 선분 QD가 평행하므로 삼각형 POA와 삼각형 QDA는 닮음이다.
>
> 따라서 $\overline{QD}=\boxed{(가)}$이고 $\angle QDA=\boxed{(나)}$이므로
>
> $$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\boxed{(가)}\times\frac{1}{2}\times\sin(\boxed{(나)})$$
>
> 이다. $\overline{CQ}=\overline{CO}-\overline{QO}$이므로
>
> $$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\frac{1}{2}\sin 2\theta\times(1-\boxed{(다)})$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 할 때, $p\times f(\pi)\times g(\pi)$의 값은?

① $\sqrt{2}\pi$ ② $\sqrt{3}\pi$ ③ 2π
④ $\sqrt{5}\pi$ ⑤ $\sqrt{6}\pi$

17-1 ▶ 2023년 교육청 고3 통 7월 공통범위 13번

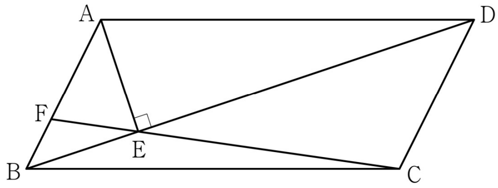
그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle\mathrm{AFC})=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는?



① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$
④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

17-2 ▶ 변형문항

그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle\mathrm{AFC})=\frac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{EC}}=12$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $6\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ADE의 넓이는?

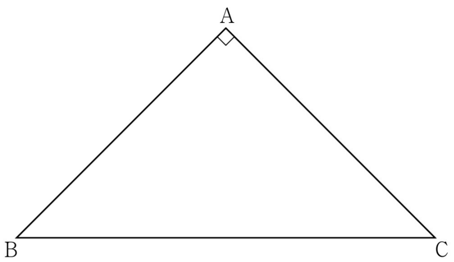


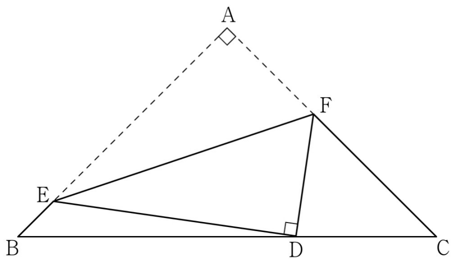
① $64-16\sqrt{2}$ ② $64-15\sqrt{2}$ ③ $64-14\sqrt{2}$
④ $64-13\sqrt{2}$ ⑤ $64-12\sqrt{2}$

18-1

▶ 2023년 교육청 고2 통 6월 29번

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 BC 위의 점 D, 선분 AB 위의 점 E, 선분 AC 위의 점 F에 대하여 선분 EF를 접는 선으로 하여 점 A가 점 D와 겹쳐지도록 접었다. 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이의 비가 $2:1$일 때, 선분 DF의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

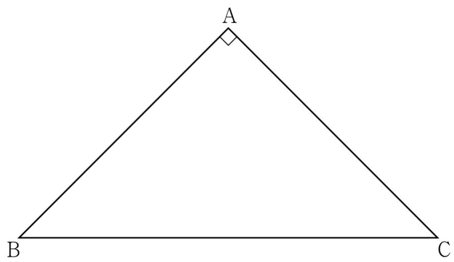


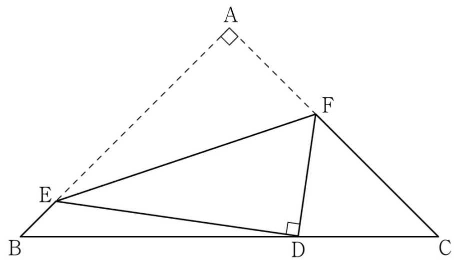


18-2

▶ 변형문항

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC 모양의 종이가 있다. 선분 BC 위의 점 D, 선분 AB 위의 점 E, 선분 AC 위의 점 F에 대하여 선분 EF를 접는 선으로 하여 점 A가 점 D와 겹쳐지도록 접었다. 삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이의 비가 $3:1$일 때, 선분 DF의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)





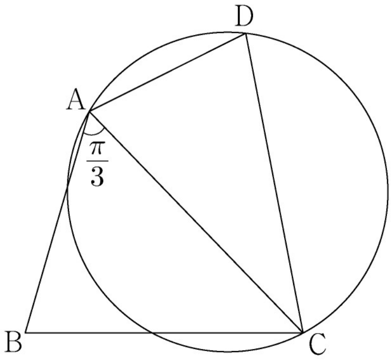
19-1

▶ 2023년(2024학년도) 평가원 고3 통 11월 공통범위 13번

그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=\sqrt{13},\ \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\ \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. $S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$
④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

19-2

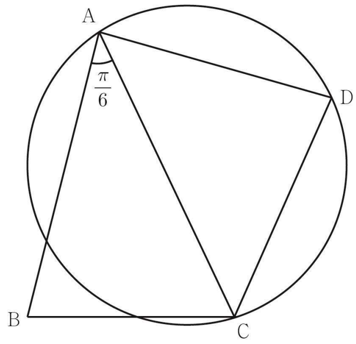
▶ 변형문항

그림과 같이

$$\overline{AB}=2\sqrt{3},\ \overline{BC}=\sqrt{7},\ \overline{AD}\times\overline{CD}=10,\ \angle BAC=\frac{\pi}{6}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. $S_2=\frac{4}{5}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?

(단, $\overline{AC}>2$이다.)



① $\frac{125}{24}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{127}{24}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{129}{24}$

빠른정답

01-1 정답 14
01-2 정답 25

02-1 정답 ①
02-2 정답 ③

03-1 정답 ⑤
03-2 정답 ⑤

04-1 정답 29
04-2 정답 29

05-1 정답 ⑤
05-2 정답 ⑤

06-1 정답 ⑤
06-2 정답 ⑤

07-1 정답 35
07-2 정답 39

08-1 정답 ④
08-2 정답 ③

09-1 정답 ③
09-2 정답 ③

10-1 정답 22
10-2 정답 88

11-1 정답 191
11-2 정답 689

12-1 정답 ①
12-2 정답 ④

13-1 정답 6
13-2 정답 10

14-1 정답 98
14-2 정답 147

15-1 정답 ③
15-2 정답 ③

16-1 정답 ①
16-2 정답 ③

17-1 정답 ①
17-2 정답 ①

18-1 정답 17
18-2 정답 17

19-1 정답 ①
19-2 정답 ①

01-1 정답 14

[해설]

$\frac{\pi}{2} \le x \le a$인 x에 대하여

$\frac{3}{2}\pi + b \le 3x + b \le 3a + b$이므로

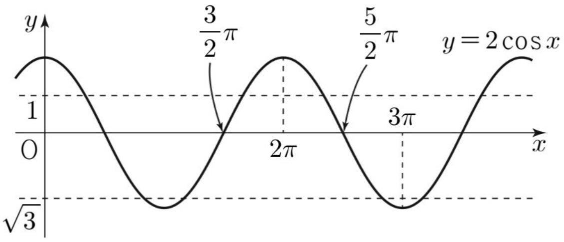
$\frac{\pi}{2} \le x \le a$에서 함수 $f(x) = 2\cos(3x + b)$의

최댓값, 최솟값은 각각

$\frac{3}{2}\pi + b \le x \le 3a + b$에서 함수 $y = 2\cos x$의

최댓값, 최솟값과 같다.

함수 $y = 2\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le b \le \pi$인 b에 대하여

$\frac{3}{2}\pi \le \frac{3}{2}\pi + b \le \frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{3}{2}\pi + b \le x \le 3a + b$에서 함수 $y = 2\cos x$의

최댓값이 1, 최솟값이 $-\sqrt{3}$이 되도록 하는 a, b는

$2\pi < \frac{3}{2}\pi + b < \frac{5}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi < 3a + b < 3\pi$를 만족시켜야 한다.

$\frac{3}{2}\pi + b \le x \le 3a + b$에서 함수 $y = 2\cos x$는

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

$\frac{3}{2}\pi + b \le x \le 3a + b$에서

함수 $y = 2\cos x$의 최댓값은 $2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + b\right)$,

최솟값은 $2\cos(3a + b)$이다.

$2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + b\right) = 1$에서 $\frac{3}{2}\pi + b = \frac{7}{3}\pi$, $b = \frac{5}{6}\pi$

$2\cos(3a + b) = -\sqrt{3}$에서 $3a + b = \frac{17}{6}\pi$, $a = \frac{2}{3}\pi$

$a \times b = \frac{2}{3}\pi \times \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{9}\pi^2$

따라서 $p = 9$, $q = 5$이며 $p + q = 14$

01-2 정답 25

[해설]

$a \le x \le \frac{\pi}{2}$인 x에 대하여

$2a + b \le 2x + b \le \pi + b$이므로

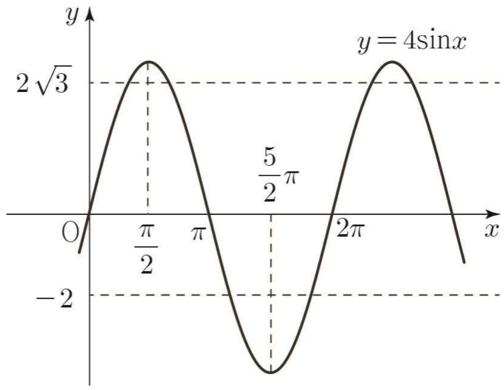
닫힌구간 $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x) = 4\sin(2x + b)$의

최댓값, 최솟값은 각각

닫힌구간 $[2a + b, \pi + b]$에서 함수 $y = 4\sin x$의

최댓값, 최솟값과 같다.

함수 $y = 4\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le b \le \pi$인 b에 대하여

$\pi \le \pi + b \le 2\pi$이므로

닫힌구간 $[2a + b, \pi + b]$에서 함수 $y = 4\sin x$의

최댓값이 $2\sqrt{3}$, 최솟값이 -2이 되도록 하는 a, b는

$\frac{1}{2}\pi < 2a + b < \pi$, $\pi < \pi + b < \frac{5}{2}\pi$를 만족시켜야 한다.

닫힌구간 $[2a + b, \pi + b]$에서 함수 $y = 4\sin x$는

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하므로

닫힌구간 $[2a + b, \pi + b]$에서

함수 $y = 4\sin x$의 최댓값은 $4\sin(2a + b)$,

최솟값은 $4\sin(\pi + b)$이다.

$4\sin(\pi + b) = -2$에서 $\pi + b = \frac{7}{6}\pi$, $b = \frac{1}{6}\pi$

$4\sin(2a + b) = 2\sqrt{3}$에서 $2a + b = \frac{2}{3}\pi$, $a = \frac{1}{4}\pi$

$a \times b = \frac{1}{4}\pi \times \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{24}\pi^2$

따라서 $p = 1$, $q = 24$이며 $p + q = 25$

02-1 정답 ①

[해설]

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times 5 = \frac{15}{2}$이므로 $\overline{AB} = 3$,

이때 $\overline{BC} = \overline{AB} + 6 = 9$

함수 $y = f(x)$의 주기가 $2b$이므로

$2b = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = 12$, $b = 6$

선분 AB의 중점의 x좌표가 3이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$이다.

점 A는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$에서 $a\sin\frac{\pi}{4} + 1 = 5$, $a = 4\sqrt{2}$

따라서 $a^2 + b^2 = (4\sqrt{2})^2 + 6^2 = 32 + 36 = 68$

02-2 정답 ③

[해설]

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times4=24$이므로 $\overline{AB}=12$,

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}+8$에서 $\overline{BC}=4$

함수 $y=f(x)$의 주기가 $2b$이므로

$2b=\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=16$, $b=8$

선분 AB의 중점의 x좌표가 8이므로

점 A의 좌표는 $(2, 4)$이다.

점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=4$에서 $a\cos\frac{\pi}{4}+2=4$, $a=2\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=(2\sqrt{2})^2+8^2=8+64=72$

03-1 정답 ⑤

[해설]

$f(0)=a\cos0+a=2a$이므로 점 A의 좌표는 $(0, 2a)$이다.

$-\frac{3}{2}\pi\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 직선 $y=\frac{a}{2}$와 함수 $y=a\cos\frac{2}{3}x+a$의

그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 방정식 $a\cos\frac{2}{3}x+a=\frac{a}{2}$의

실근과 같다.

$a\cos\frac{2}{3}x+a=\frac{a}{2}$, $\cos\frac{2}{3}x=-\frac{1}{2}$에서 $x=-\pi$ 또는

$x=\pi$이므로 점 B와 C의 좌표는 각각 $\left(-\pi, \frac{a}{2}\right)$, $\left(\pi, \frac{a}{2}\right)$이다.

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{3}=2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}a$

따라서 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

03-2 정답 ⑤

[해설]

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=a\sin\frac{\pi}{2}+a=2a$이므로 점 A의 좌표는 $(\frac{2}{3}\pi, 2a)$이다.

$-\frac{2}{3}\pi\le x\le2\pi$에서 직선 $y=\frac{3}{2}a$와 함수 $f(x)=a\sin\frac{3}{4}x+a$의

그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 방정식 $a\sin\frac{3}{4}x+a=\frac{3}{2}a$의

실근과 같다.

$a\sin\frac{3}{4}x+a=\frac{3}{2}a$, $\sin\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{2}{9}\pi$ 또는

$x=\frac{10}{9}\pi$이므로 점 B와 C의 좌표는 각각 $\left(\frac{2}{9}\pi, \frac{3}{2}a\right)$,

$\left(\frac{10}{9}\pi, \frac{3}{2}a\right)$이다.

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\overline{AC}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{8}{9}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}a$

따라서 $a=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

04-1 정답 29

[해설]

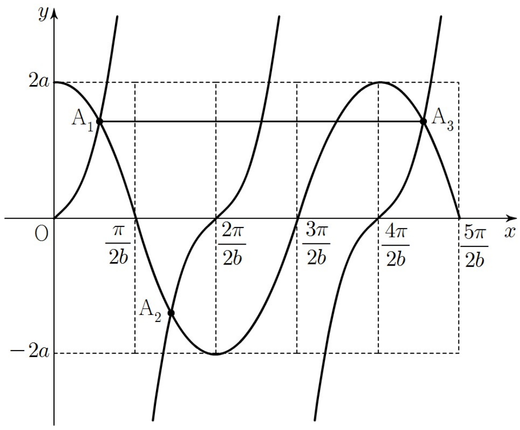
두 양수 a, b에 대하여 두 함수 $y=3a\tan bx$, $y=2a\cos bx$의

주기는 각각 $\frac{\pi}{b}$, $\frac{2\pi}{b}$이고 두 함수의 그래프가 만나는 세 점

A_1, A_2, A_3에 대하여 선분 A_1A_3을 지름으로 하는 원이 점

A_2를 지나고 이 원의 넓이가 π이므로

$$\overline{A_1A_3}=2=\frac{2\pi}{b} \qquad \therefore\ b=\pi$$



두 함수의 교점의 x좌표는

$$3a\tan\pi x=2a\cos\pi x, \qquad 3\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}=2\cos\pi x$$

$$3\sin\pi x=2\cos^2\pi x=2(1-\sin^2\pi x)$$

$$(2\sin\pi x-1)(\sin\pi x+2)=0 \qquad \therefore\ \sin\pi x=\frac{1}{2}$$

$\pi x=\frac{1}{6}\pi$ 또는 $\pi x=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\pi x=\frac{13}{6}\pi$이므로

$$A_1\left(\frac{1}{6}, \sqrt{3}a\right),\ A_2\left(\frac{5}{6}, -\sqrt{3}a\right),\ A_3\left(\frac{13}{6}, \sqrt{3}a\right)$$

선분 A_1A_2와 A_2A_3가 서로 수직이므로

$$\frac{-2\sqrt{3}a}{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}\times\frac{2\sqrt{3}a}{\frac{13}{6}-\frac{5}{6}}=-1 \qquad \therefore\ a^2=\frac{2}{27}$$

$$\therefore\ \left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=a^2=\frac{2}{27}$$

$p=27$, $q=2$이므로 $\quad p+q=29$

04-2 정답 29

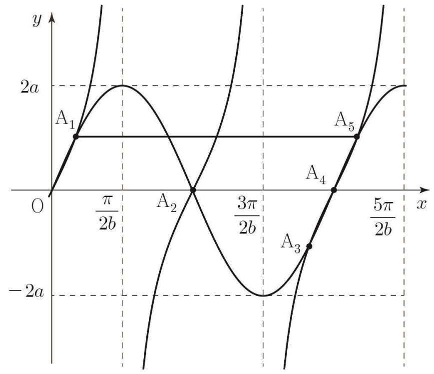
[해설]

두 양수 a, b에 대하여 두 함수 $y=\sqrt{3}a\tan bx$, $y=2a\sin bx$의

주기는 각각 $\frac{\pi}{b}$, $\frac{2\pi}{b}$이고 두 함수의 그래프가 만나는 5개의 점

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5에 대하여 선분 A_1A_5을 지름으로 하는 원이 점 A_3를 지나고 이 원의 넓이가 4π이므로

$$\overline{A_1A_5}=4=\frac{2\pi}{b} \qquad \therefore\ b=\frac{1}{2}\pi$$



두 함수의 교점의 x좌표는

$$\sqrt{3}a\tan\frac{\pi}{2}x=2a\sin\frac{\pi}{2}x, \qquad \sqrt{3}\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=2\sin\frac{\pi}{2}x$$

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}x=2\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$2\sin\frac{\pi}{2}x\left(\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$$

$\therefore\ \sin\frac{\pi}{2}x=0$ 또는 $\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

그래프 상에서 A_1, A_3, A_5의 x좌표는 $\cos\frac{\pi}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$을

만족하는 $\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{6}\pi$ 또는 $\frac{\pi}{2}x=\frac{11}{6}\pi$ 또는 $\frac{\pi}{2}x=\frac{13}{6}\pi$ 이므로

$$A_1\left(\frac{1}{3},\ a\right),\ A_3\left(\frac{11}{3},\ -a\right),\ A_5\left(\frac{13}{3},\ a\right)$$

선분 A_1A_3와 A_3A_5가 서로 수직이므로

$$\frac{-2a}{\frac{11}{3}-\frac{1}{3}}\times\frac{2a}{\frac{13}{3}-\frac{11}{3}}=-1 \qquad \therefore\ a^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore\ \left(\frac{a}{b}\pi\right)^2=\frac{\frac{5\pi^2}{9}}{\frac{\pi^2}{4}}=\frac{20}{9}$$

$p=9$, $q=20$ 이므로 $\qquad p+q=29$

05-1 정답 ⑤

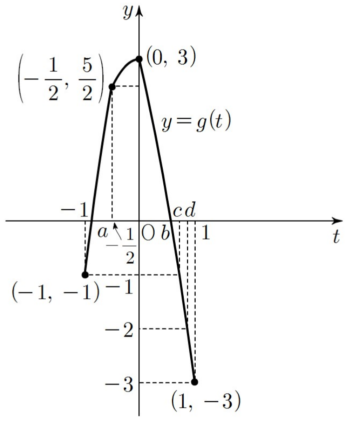
[해설]

$$f(x)=2\cos^2x-|1+2\sin x|-2|\sin x|+2$$
$$=-2\sin^2x-|1+2\sin x|-2|\sin x|+4$$

$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$, $g(t)=f(x)$라 하면

$$g(t)=-2t^2-|1+2t|-2|t|+4$$
$$=\begin{cases}-2t^2+4t+5 & \left(-1\le t<-\frac{1}{2}\right)\\ -2t^2+3 & \left(-\frac{1}{2}\le t<0\right)\\ -2t^2-4t+3 & (0\le t\le 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(t)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



즉 $g(t)$의 값이 0이하의 정수가 되도록 하는 t의 값은

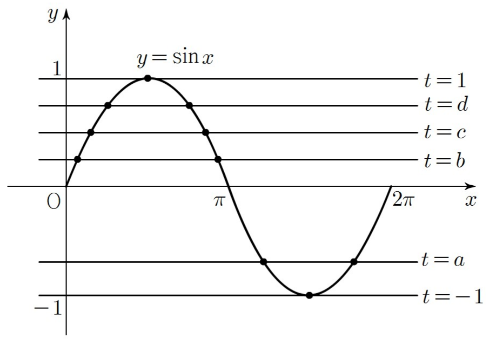
$g(t)=0$일 때 $\qquad t=a$, $t=b\left(-1<a<-\frac{1}{2},\ 0<b<1\right)$

$g(t)=-1$일 때 $\qquad t=-1$, $t=c\ (b<c<1)$

$g(t)=-2$일 때 $\qquad t=d\ (c<d<1)$

$g(t)=-3$일 때 $\qquad t=1$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=t$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



따라서 조건을 만족시키는 집합 A의 원소의 개수는 10이다.

05-2 정답 ⑤

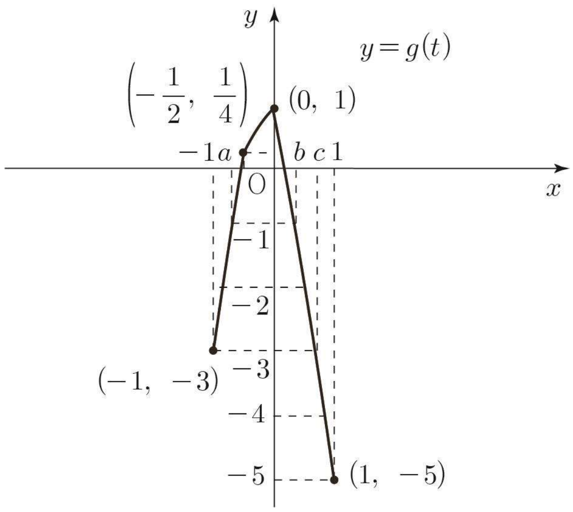
[해설]

$$f(x)=\sin^2x-|1+2\cos x|-3|\cos x|+1$$
$$=-\cos^2x-|1+2\cos x|-3|\cos x|+2$$

$\cos x=t\ (-1\le t\le 1)$, $g(t)=f(x)$라 하면

$$g(t)=-t^2-|1+2t|-3|t|+2$$
$$=\begin{cases}-t^2+5t+3 & \left(-1\le t<-\frac{1}{2}\right)\\ -t^2+t+1 & \left(-\frac{1}{2}\le t<0\right)\\ -t^2-5t+1 & (0\le t\le 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(t)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



즉 $g(t)$의 값이 $|g(t)|$의 값이 홀수인 정수 t의 값은

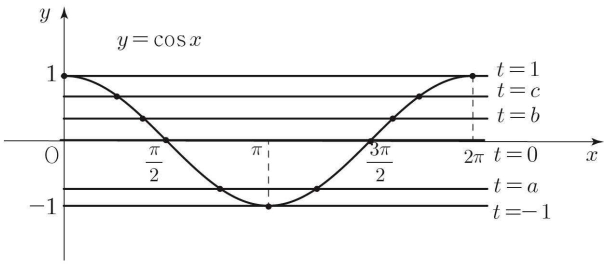
$g(t)=1$일 때 $t=0$

$g(t)=-1$일 때 $t=a$, $t=b\left(-1<a<-\frac{1}{2},\ 0<b<1\right)$

$g(t)=-3$일 때 $t=-1$, $t=c\,(b<c<1)$

$g(t)=-5$일 때 $t=1$

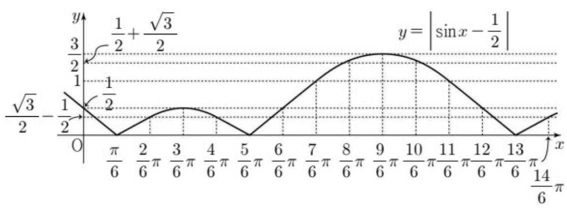
$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=t$를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



따라서 조건을 만족시키는 집합 A의 원소의 개수는 11이다.

06-1 정답 ⑤

[해설]



함수 $y=f(x)$의 주기는 2π이다.

$n=1$일 때, $0\le x\le\frac{3}{6}\pi$에서 $g(1)=\frac{1}{2}$이다.

$n=2$일 때, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{4}{6}\pi$에서 $g(2)=\frac{1}{2}$이다.

$n=3$일 때, $\frac{2}{6}\pi\le x\le\frac{5}{6}\pi$에서 $g(3)=\frac{1}{2}$이다.

$n=4$일 때, $\frac{3}{6}\pi\le x\le\frac{6}{6}\pi$에서 $g(4)=\frac{1}{2}$이다.

$n=5$일 때, $\frac{4}{6}\pi\le x\le\frac{7}{6}\pi$에서 $g(5)=1$이다.

$n=6$일 때, $\frac{5}{6}\pi\le x\le\frac{8}{6}\pi$에서

$g(6)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$n=7$일 때, $\frac{6}{6}\pi\le x\le\frac{9}{6}\pi$에서 $g(7)=\frac{3}{2}$이다.

$n=8$일 때, $\frac{7}{6}\pi\le x\le\frac{10}{6}\pi$에서 $g(8)=\frac{3}{2}$이다.

$n=9$일 때, $\frac{8}{6}\pi\le x\le\frac{11}{6}\pi$에서 $g(9)=\frac{3}{2}$이다.

$n=10$일 때, $\frac{9}{6}\pi\le x\le\frac{12}{6}\pi$에서 $g(10)=\frac{3}{2}$이다.

$n=11$일 때, $\frac{10}{6}\pi\le x\le\frac{13}{6}\pi$에서

$g(11)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다

$n=12$일 때, $\frac{11}{6}\pi\le x\le\frac{14}{6}\pi$에서 $g(12)=1$이다.

따라서 $1\le n\le 12$에서 $g(n)$이 무리수인 n은 6, 11이다. 함수 $f(x)$의 주기는 2π이므로 자연수 m에 대하여

$$\frac{n-1}{6}\pi\le x\le\frac{n+2}{6}\pi \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{n-1}{6}\pi+2m\pi\le x\le\frac{n+2}{6}\pi+2m\pi$$

$$\frac{n+12m-1}{6}\pi\le x\le\frac{n+12m+2}{6}\pi \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $f(x)$의 최댓값은 서로 같다.

따라서 $g(n)=g(n+12m)$이다.

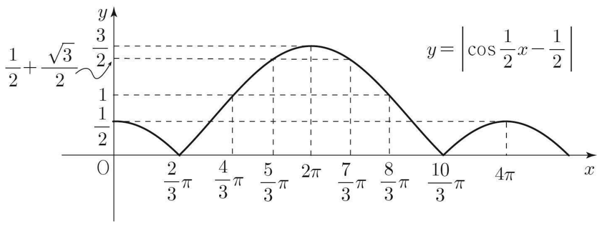
$g(6)=g(18)=g(30)$, $g(11)=g(23)=g(35)$이므로

40 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은

$6+11+18+23+30+35=123$이다.

06-2 정답 ⑤

[해설]



함수 $y=f(x)$의 주기는 4π이다.

$n=1$일 때, $0\le x\le\pi$에서 $g(1)=\frac{1}{2}$이다.

$n=2$일 때, $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{4}{3}\pi$에서 $g(2)=1$이다.

$n=3$일 때, $\frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{5}{3}\pi$에서 $g(3)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$n=4$일 때, $\pi\le x\le 2\pi$에서 $g(4)=\frac{3}{2}$이다.

$n=5$일 때, $\frac{4}{3}\pi\le x\le\frac{7}{3}\pi$에서 $g(5)=\frac{3}{2}$이다.

$n=6$일 때, $\frac{5}{3}\pi \le x \le \frac{8}{3}\pi$에서 $g(6)=\frac{3}{2}$이다.

$n=7$일 때, $2\pi \le x \le 3\pi$에서 $g(7)=\frac{3}{2}$이다.

$n=8$일 때, $\frac{7}{3}\pi \le x \le \frac{10}{3}\pi$에서 $g(8)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

$n=9$일 때, $\frac{8}{3}\pi \le x \le \frac{11}{3}\pi$에서 $g(9)=1$이다.

$n=10$일 때, $3\pi \le x \le 4\pi$에서 $g(10)=\frac{1}{2}$이다.

$n=11$일 때, $\frac{10}{3}\pi \le x \le \frac{13}{3}\pi$에서 $g(11)=\frac{1}{2}$이다

$n=12$일 때, $\frac{11}{3}\pi \le x \le \frac{14}{3}\pi$에서 $g(12)=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $1 \le n \le 12$에서 $g(n)$이 무리수인 n은 3, 8이다. 함수 $f(x)$의 주기는 4π이므로 자연수 m에 대하여

$\frac{n-1}{3}\pi \le x \le \frac{n+2}{3}\pi$ …… ①

$\frac{n-1}{3}\pi+4m\pi \le x \le \frac{n+2}{3}\pi+4m\pi$

$\frac{n+12m-1}{3}\pi \le x \le \frac{n+12m+2}{3}\pi$ …… ②

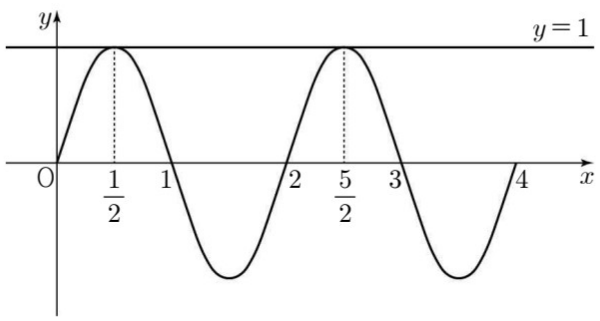
①, ②에서 $f(x)$의 최댓값은 서로 같다.
따라서 $g(n)=g(n+12m)$이다.
$g(3)=g(15)$, $g(8)=g(20)$이므로
20 이하의 자연수 k에 대하여 $g(k)$가 무리수가 되도록 하는 모든 k의 값의 합은
$3+8+15+20=46$이다.

07-1 정답 35

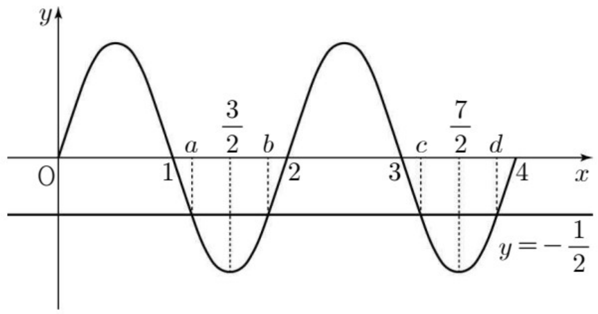
[해설]
자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 4$일 때, x에 대한 방정식 $\sin \pi x-\frac{(-1)^{n+1}}{n}=0$의 실근의 합은

함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$과 만나는 점의 x좌표의 합과 같다. 함수 $y=\sin \pi x$의 주기는 2이다.

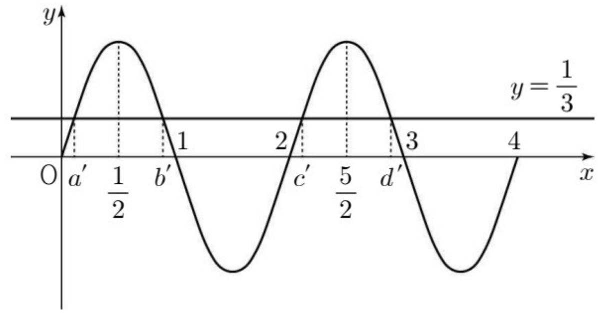
(ⅰ) $n=1$일 때, 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표는 $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$이므로 $f(1)=3$이다.



(ⅱ) $n=2$일 때, 함수 $y=\sin\pi x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$과 만나는 점의 x좌표를 a, b, c, d라 하면 $\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{c+d}{2}=\frac{7}{2}$에서 $f(2)=10$이다.



(ⅲ) $n=3$일 때, 함수 $y=\sin \pi x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{3}$과 만나는 점의 x좌표를 a', b', c', d'이라 하면 $\frac{a'+b'}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{c'+d'}{2}=\frac{5}{2}$에서 $f(3)=6$이다.



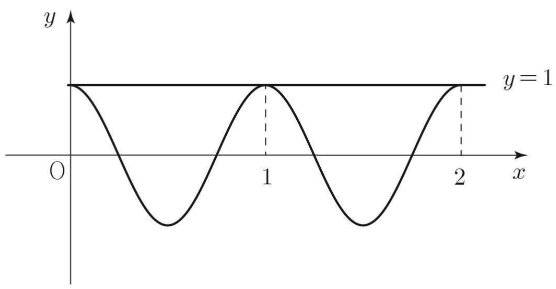
(ⅳ) $n \ge 4$일 때, (ⅱ), (ⅲ)과 같은 방법으로 n이 짝수일 때 $f(n)=10$, n이 1이 아닌 홀수일 때 $f(n)=6$이다. 따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=3+10+6+10+6=35$

07-2 정답 39

[해설]
자연수 n에 대하여 $0 \le x \le 2$일 때, x에 대한 방정식 $\cos 2\pi x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$의 실근의 합은

함수 $y=\cos 2\pi x$의 그래프가 직선 $y=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$과 만나는 점의 x좌표의 합과 같다. 함수 $y=\cos 2\pi x$의 주기는 1이다.

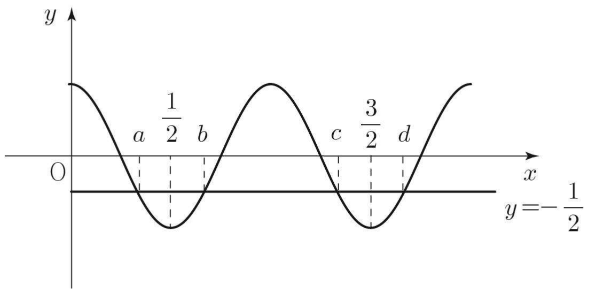
(ⅰ) $n=1$일 때, 함수 $y=\cos 2\pi x$의 그래프가 직선 $y=1$과 만나는 점의 x좌표는 0, 1, 2이므로 $f(1)=3$이다.



(ⅱ) $n=2$일 때, 함수 $y=\cos 2\pi x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{1}{2}$과

만나는 점의 x좌표를 a, b, c, d라 하면 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{c+d}{2}=\dfrac{3}{2}$에서 $f(2)=4$이다.



(ⅲ) $n\geq 3$일 때, (ⅱ)와 같은 방법으로 $f(n)=4$이다. 따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10} f(n)=f(1)+\sum_{n=2}^{10} f(n)=3+9\times 4=39$

08-1 정답 ④

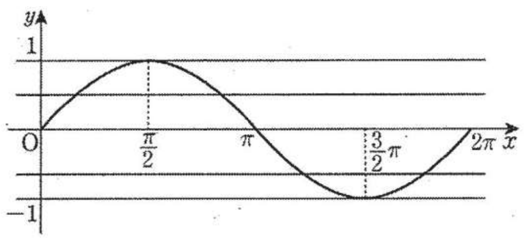
[해설]

(가)에서 $g(a\pi)=-1$ 또는 $g(a\pi)=1$이다.

$\sin(a\pi)=-1$에서 $a=\dfrac{3}{2}$, $\sin(a\pi)=1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로

$-1\leq t\leq 1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\leq x\leq 2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은

$t=-1$일 때 $\dfrac{3}{2}\pi$, $-1<t\leq 0$일 때 3π,

$0<t<1$일 때 π, $t=1$일 때 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

$0\leq x\leq 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이

$\dfrac{5}{2}\pi$이므로 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, α를 가지고

$0<\alpha<1$이다.

(ⅰ) $a=\dfrac{3}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b-\dfrac{1}{2}=0$ 즉, $b=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}=(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{2}$이므로

조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a=\dfrac{1}{2}$인 경우

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x+b$에서 $f(-1)=0$이므로

$f(-1)=b+\dfrac{1}{2}=0$ 즉, $b=-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}=(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{2}$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$이고 $f(2)=\dfrac{9}{2}$이다.

08-2 정답 ③

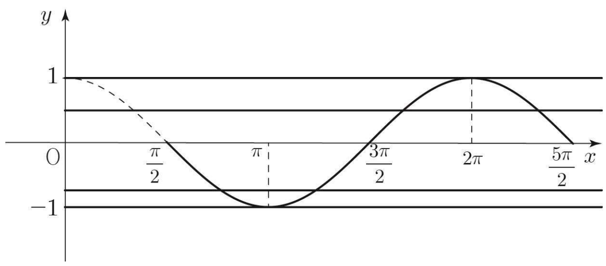
[해설]

(가)에서 $g\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)=-1$ 또는 $g\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)=1$이다.

$\cos\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)=-1$에서 $a=2$, $\cos\left(\dfrac{a}{2}\pi\right)=1$에서 $a=4$

(나)에서 방정식 $f(g(x))=0$의 해가 존재하므로

$-1\leq t\leq 1$이고 $f(t)=0$인 실수 t가 존재한다.



$0\leq x\leq 2\pi$에서 방정식 $g(x)=t$의 모든 해의 합은

$t=-1$일 때 π, $-1<t<0$일 때 2π, $t=0$일 때 $\dfrac{9}{2}\pi$,

$0<t<1$일 때 4π, $t=1$일 때 2π이다.

$\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq \dfrac{5}{2}\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합이

5π이므로 방정식 $f(x)=0$은 두 실근 -1, α를 가지고

$0<\alpha<1$이다.

(ⅰ) $a=2$인 경우

$f(x)=3x^2+2x+b$에서 $f(-1)=0$이므로 $b=-1$

$f(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$이므로

조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $a=4$인 경우

$f(x)=3x^2+4x+b$에서 $f(-1)=0$이므로 $b=1$

$f(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$에서

방정식 $f(x)=0$의 두 근은 $x=-1$ 또는 $x=-\dfrac{1}{3}$이므로

조건을 만족시키지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=3x^2+2x-1$이고 $f(1)=4$이다.

09-1 정답 ③

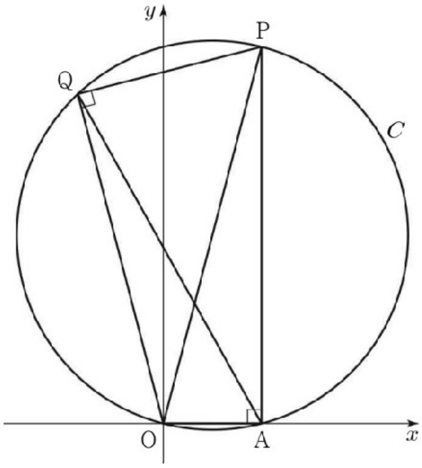
[해설]
$0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서
$k\sin x = \cos x$
$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{1}{k}$ $(\cos x \ne 0)$
그러므로 점 A의 x좌표를 α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면
함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로
점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고
두 점 A, B의 좌표는
각각 $(\alpha, \cos\alpha)$, $(\alpha+\pi, -\cos\alpha)$
선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 C의 좌표는
$\left(\frac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1}, \frac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$이므로
$C\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi, -2\cos\alpha\right)$
점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$-2\cos\alpha = k\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$
$-2\cos\alpha = k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로
$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서
점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고
$\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
$=\sqrt{5}$
점 B와 직선 CD 사이의 거리는
$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$
따라서
삼각형 BCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

09-2 정답 ③

[해설]
$0 \le x \le 2$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서
$\sin\pi x = k\cos\pi x$
$\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}=\tan\pi x = k$ $(\cos\pi x \ne 0)$
그러므로 점 A의 x좌표를 α $\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$라 하면
$\frac{\sin\pi\alpha}{\cos\pi\alpha}=k$ ……㉠
함수 $y=\tan\pi x$의 주기는 1이므로
점 B의 x좌표는 $\alpha+1$이고
두 점 A, B의 좌표는
각각 $(\alpha, \sin\pi\alpha)$, $(\alpha+1, -\sin\pi\alpha)$
선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 C의 좌표는
$\left(\frac{3\times(\alpha+1)-1\times\alpha}{3-1}, \frac{3\times(-\sin\pi\alpha)-1\times\sin\pi\alpha}{3-1}\right)$이므로
$C\left(\alpha+\frac{3}{2}, -2\sin\pi\alpha\right)$
점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$-2\sin\pi\alpha=\sin\left(\pi\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$
$-2\sin\pi\alpha=-\cos\pi\alpha$
$2\sin\pi\alpha=\cos\pi\alpha$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $k=\frac{1}{2}$이므로
$\tan\pi\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\pi\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\pi\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$
$k\cos\left(\pi\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\sin\pi\alpha=\frac{\sqrt{5}}{10}$에서
점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$이고
$\overline{CD}=\frac{\sqrt{5}}{10}-\left(-2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$
$=\frac{1}{2}\sqrt{5}$
점 B와 직선 CD 사이의 거리는
$\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)-(\alpha+1)=\frac{1}{2}$
따라서
삼각형 BCD의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{5}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{8}$
$\frac{S}{k}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

10-1 정답 22

[해설]
$\overline{OP}=k_1$, $\overline{OQ}=k_2$라 하자.
삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여
$2^2=k_1^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_1\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$
삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여
$2^2=k_2^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_2\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$이므로
두 실수 k_1, k_2는 이차방정식
$2^2=x^2+(2\sqrt{15})^2-2\times x\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$의
서로 다른 두 실근이다.
$x^2-15x+56=(x-7)(x-8)=0$에서
$k_1>k_2$이므로 $k_1=8$, $k_2=7$



$\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})$이므로
$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OQA}$
삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면
두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로
점 Q도 원 C 위의 점이다.

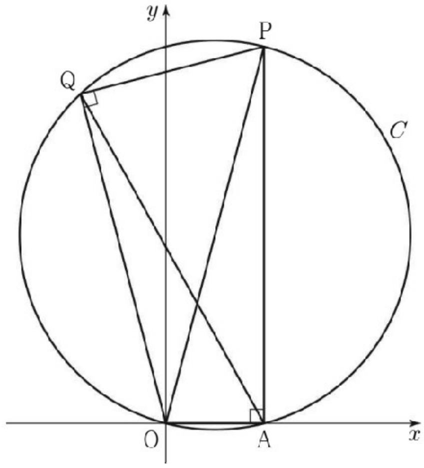
$$\sin(\angle\mathrm{OPA})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\text{이므로}$$

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\mathrm{OPA})}=8=2R$$
그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.
$\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{OQP}$
$$=\frac{\pi}{2}\text{이므로}$$
직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{8^2-7^2}$
$$=\sqrt{15}$$
사각형 OAPQ의 넓이는
두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로
$$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{15}+\frac{1}{2}\times7\times\sqrt{15}=\frac{11}{2}\sqrt{15}\text{에서}$$
$p=2,\ q=11$
따라서 $p\times q=22$

10-2 정답 88

[해설]

$\overline{\mathrm{OP}}=k_1,\ \overline{\mathrm{OQ}}=k_2$라 하자.
삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여
$$1^2=k_1^2+(\sqrt{15})^2-2\times k_1\times\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$$
삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여
$$1^2=k_2^2+(\sqrt{15})^2-2\times k_2\times\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\text{이므로}$$
두 실수 $k_1,\ k_2$는 이차방정식
$$1^2=x^2+(\sqrt{15})^2-2\times x\times\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}\text{의}$$
서로 다른 두 실근이다.
$2x^2-15x+28=(2x-7)(x-4)=0$에서
$k_1>k_2$이므로 $k_1=4,\ k_2=\frac{7}{2}$



$\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})$이므로
$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OQA}$
삼각형 OAP의 외접원을 C라 하면
두 점 P, Q의 y좌표가 양수이므로
점 Q도 원 C 위의 점이다.

$$\sin(\angle\mathrm{OPA})=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\text{이므로}$$

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면
삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여
$$\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin(\angle\mathrm{OPA})}=4=2R$$
그러므로 선분 OP는 원 C의 지름이다.
$\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{OQP}$
$$=\frac{\pi}{2}\text{이므로}$$
직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{4^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{15}$$
사각형 OAPQ의 넓이는
두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로
$$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{15}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{15}=\frac{11}{8}\sqrt{15}\text{에서}$$
$p=8,\ q=11$
따라서 $p\times q=88$

11-1 정답 191

[해설]
$\overline{\mathrm{CD}}=a$라 하면 $\overline{\mathrm{CE}}=5\sqrt{3}-a$
$\angle\mathrm{BAC},\ \angle\mathrm{BEC}$는 호 BC에 대한 원주각이므로

$\angle BAC = \angle BEC$

$\cos(\angle BAC) = \cos(\angle BEC) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ …… ㉠

삼각형 ECD에서 코사인법칙에 의해

$a^2 = 5^2 + (5\sqrt{3}-a)^2 - 2\times 5\times(5\sqrt{3}-a)\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\dfrac{25\sqrt{3}}{3}a = 75,\ a = 3\sqrt{3}$

$\overline{CD} = 3\sqrt{3},\ \overline{CE} = 2\sqrt{3}$

$\angle BAD = \angle CED,\ \angle BDA = \angle CDE$이므로

두 삼각형 ABD, ECD는 서로 닮음이다.

$\overline{AB} : \overline{EC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$2 : 2\sqrt{3} = \overline{BD} : 3\sqrt{3},\ \overline{BD} = 3$

$BE = BD + DE = 8$

삼각형 EBC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BC}^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\times 8\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{6} = 60$

$\overline{BC} = 2\sqrt{15}$

㉠에 의해

$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{33}}{6}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$2R = \dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = 2\sqrt{15}\times\dfrac{6}{\sqrt{33}}$

$R = \dfrac{6\sqrt{55}}{11}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = \dfrac{180}{11}\pi$

따라서 $p+q = 11+180 = 191$

11-2 정답 689

[해설]

$\overline{CD} = a$라 하면 $\overline{CE} = 10-a$

$\angle BAC$, $\angle BEC$는 호 BC에 대한 원주각이므로

$\angle BAC = \angle BEC$

$\cos(\angle BAC) = \cos(\angle BEC) = \dfrac{1}{3}$ …… ㉠

삼각형 ECD에서 코사인법칙에 의해

$a^2 = 6^2 + (10-a)^2 - 2\times 6\times(10-a)\times\dfrac{1}{3}$

$16a = 96,\ a = 6$

$\overline{CD} = 6,\ \overline{CE} = 4$

$\angle BAD = \angle CED,\ \angle BDA = \angle CDE$이므로

두 삼각형 ABD, ECD는 서로 닮음이다.

$\overline{AB} : \overline{EC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$2 : 4 = \overline{BD} : 6,\ \overline{BD} = 3$

$\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = 9$

삼각형 EBC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BC}^2 = 9^2 + 4^2 - 2\times 9\times 4\times\dfrac{1}{3} = 73$

$\overline{BC} = \sqrt{73}$

㉠에 의해

$\sin(\angle BAC) = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$2R = \dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)} = \sqrt{73}\times\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$R = \dfrac{3\sqrt{146}}{8}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = \dfrac{657}{32}\pi$

따라서 $p+q = 32+657 = 689$

12-1 정답 ①

[해설]

$\overline{AB} = x$, $\overline{AD} = y$로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$2 = \dfrac{1}{2}\times x\times y\times \sin A \qquad \therefore\ xy = \dfrac{4}{\sin A}$ …… ㉠

$\angle BCD = \theta$라 하면 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$이므로

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times 3\times 2\times \cos\theta$

$= 9+4-12\times\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 17$ …… ㉡

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\times\cos A$

$= (x+y)^2 - 2xy(1+\cos A)$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$(x+y)^2 = 17 + 2xy(1+\cos A)$ …… ㉣

점 E가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 선분 AE를 지름으로 하는 원의 반지름을 R라 하면 선분 CE를 지름으로 하는 원의 반지름은 $2R$이다.

또한 $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$이므로 $\overline{P_1P_2} = 3k$,

$\overline{Q_1Q_2} = 5\sqrt{2}k$라 하면 삼각형 CQ_1Q_2에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{5\sqrt{2}k}{\sin\theta} = \dfrac{5\sqrt{2}k}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{15k}{2} = 2\times 2R \qquad \therefore\ 2R = \dfrac{15}{4}k$

삼각형 AP_1P_2에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3k}{\sin A} = 2R = \dfrac{15}{4}k \qquad \therefore\ \sin A = \dfrac{4}{5}$

㉠에 대입하면 $xy = 5$

$\angle DAB > \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos A = -\sqrt{1-\sin^2 A} = -\dfrac{3}{5}$

$xy = 5$와 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$를 ㉣에 대입하면

$$(x+y)^2=17+2\times5\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=21$$

$$\therefore\ x+y=\sqrt{21}$$

12-2 정답 ④

[해설]

$\overline{AB}=x$, $\overline{AD}=y$로 놓으면 삼각형 ABD의 넓이가 3이므로

$$3=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin A\qquad\therefore\ xy=\frac{6}{\sin A}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$\angle BCD=\theta$라 하면 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos\theta$$

$$=16+9-24\times\left(-\frac{1}{4}\right)=31\quad\cdots\cdots ㉡$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\times\cos A$$

$$=(x+y)^2-2xy(1+\cos A)\quad\cdots\cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$(x+y)^2=31+2xy(1+\cos A)\quad\cdots\cdots ㉣$$

점 E가 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로 선분 AE를 지름으로 하는 원의 반지름을 R라 하면 선분 CE를 지름으로 하는 원의 반지름은 $2R$이다.

또한 $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:2\sqrt{15}$이므로 $\overline{P_1P_2}=3k$,

$\overline{Q_1Q_2}=2\sqrt{15}k$라 하면 삼각형 CQ_1Q_2에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{15}k}{\sin\theta}=\frac{2\sqrt{15}k}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=8k=2\times2R\qquad\therefore\ 2R=4k$$

삼각형 AP_1P_2에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3k}{\sin A}=2R=4k\qquad\therefore\ \sin A=\frac{3}{4}$$

㉠에 대입하면 $\quad xy=8$

$\angle DAB>\frac{\pi}{2}$이므로 $\quad\cos A=-\sqrt{1-\sin^2A}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$

$xy=8$와 $\cos A=-\frac{\sqrt{7}}{4}$를 ㉣에 대입하면

$$(x+y)^2=31+2\times8\times\left(1-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=47-4\sqrt{7}$$

$$\therefore\ (x+y)^2=47-4\sqrt{7}$$

13-1 정답 6

[해설]

$\angle CAE=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$이고 $\overline{BC}=4$이므로

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\sin\theta}=\overline{BC},\ \overline{CE}=1$$

$\overline{BF}=\overline{CE}=1$이므로 $\overline{FC}=3$

$\overline{BC}=\overline{DE}$에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$이다.

$\angle BAD=90^\circ-\angle DAC=\theta$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABF)}=\frac{1}{\sin\theta}=4$이므로 $\sin(\angle ABF)=\frac{k}{4}$

직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle ABC)=\frac{\overline{AC}}{4}$이므로

$$\overline{AC}=4\sin(\angle ABC)=4\times\frac{k}{4}=k$$

직각삼각형 ABC에서 $\cos(\angle BCA)=\frac{k}{4}$이므로

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{FC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{FC}\times\cos(\angle FCA)$$

$$k^2=k^2+3^2-2\times k\times3\times\frac{k}{4},\ \frac{3}{2}k^2=9$$

따라서 $k^2=6$

13-2 정답 10

[해설]

$\angle CAE=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{1}{5}$이고 $\overline{BC}=5$이므로

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CE}}{\sin\theta}=\overline{BC},\ \overline{CE}=1$$

$\overline{BF}=\overline{CE}=1$이므로 $\overline{FC}=4$

$\overline{BC}=\overline{DE}$에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$이다.

$\angle BAD=90^\circ-\angle DAC=\theta$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$\frac{k}{\sin(\angle ABF)}=\frac{1}{\sin\theta}=5$이므로 $\sin(\angle ABF)=\frac{k}{5}$

직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle ABC)=\frac{\overline{AC}}{5}$이므로

$$\overline{AC}=5\sin(\angle ABC)=5\times\frac{k}{5}=k$$

직각삼각형 ABC에서 $\cos(\angle BCA)=\frac{k}{5}$이므로

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{FC}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{FC}\times\cos(\angle FCA)$$

$$k^2=k^2+4^2-2\times k\times4\times\frac{k}{5},\ \frac{8}{5}k^2=16$$

따라서 $k^2=10$

14-1 정답 98

[해설]

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2$에서

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BD}}^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos\frac{2}{3}\pi\\&=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=2^2+1^2-(\boxed{-2})\\&=7\end{aligned}$$

이므로

$$R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{\mathrm{BD}}^2=\boxed{\frac{7}{6}\sqrt{6}}$$

이상에서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7}{6}\sqrt{6}$이므로

$$9(pqr)^2=9\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right)^2=98$$

14-2 정답 147

[해설]

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\frac{5}{6}\pi}=2R_2$에서

$$R_2=\boxed{1}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BD}}^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos\frac{5}{6}\pi\\&=3^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\times3\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=3^2+(3\sqrt{3})^2-(\boxed{-27})\\&=63\end{aligned}$$

이므로

$$R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times1\times\overline{\mathrm{BD}}^2=\boxed{\frac{63}{2}\sqrt{2}}$$

이상에서 $p=1$, $q=-27$, $r=\frac{63}{2}\sqrt{2}$이므로

$$\therefore\ -2\times\frac{r^2}{pq}=147$$

15-1 정답 ③

[해설]

삼각형 PBC에서

$\angle\mathrm{BPC}=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin135^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin30^\circ}$이므로,

$\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sin30^\circ}{\sin135^\circ}=\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=(2\sqrt{2})^2+b^2-2\times2\sqrt{2}\times b\times cos60^\circ$

$b^2-2\sqrt{2}b-4=0$

$b>0$이므로 $b=\sqrt{2}+\sqrt{6}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$이므로 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$A=60^\circ$에서 $C<120^\circ$이므로 $C=45^\circ$

$\angle\mathrm{PCA}=45^\circ-15^\circ=30^\circ$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\sin30^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

15-2 정답 ③

[해설]

삼각형 PBC에서

$\angle\mathrm{BPC}=180^\circ-(45^\circ+15^\circ)=120^\circ$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin120^\circ}=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin45^\circ}$이므로,

$\overline{\mathrm{PC}}=4\times\dfrac{\sin45^\circ}{\sin120^\circ}=\dfrac{4}{3}\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AC}}=b$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=(2\sqrt{6})^2+b^2-2\times2\sqrt{6}\times b\times\cos45^\circ$

$b^2-4\sqrt{3}b+8=0$

$b>0$이므로 $b=2+2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sin C}$이므로 $\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$C<90^\circ$이므로 $C=60^\circ$

$\angle\mathrm{PCA}=60^\circ-15^\circ=45^\circ$이므로 삼각형 APC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{6}\times2(1+\sqrt{3})\times\sin45^\circ=4+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

16-1 정답 ①

[해설]

$\angle\mathrm{CAB}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{COB}=2\theta$이다. 삼각형 POB가 이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{OQB}=\dfrac{\pi}{2}$이므로 점 Q는 선분 PB의 중점이고 $\angle\mathrm{POQ}=2\theta$이다. 선분 PO와 선분 QD가 평행하므로

삼각형 POB와 삼각형 QDB는 닮음이다.

따라서 $\overline{QD}=\boxed{1}$이고 $\angle QDB=\boxed{4\theta}$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\boxed{1}\times 1\times sin(\boxed{4\theta})$

이다. $\overline{CQ}=\overline{CO}-\overline{QO}$이므로

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\sin 2\theta\times(2-\boxed{2\cos 2\theta}$

이다. $p=1$, $f(\theta)=4\theta$, $g(\theta)=2\cos 2\theta$이므로

$p\times f\left(\frac{\pi}{16}\right)\times g\left(\frac{\pi}{8}\right)=1\times\frac{\pi}{4}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

16-2 정답 ③

[해설]

$\angle CBA=\theta$이므로 $\angle COA=2\theta$이다. 삼각형 POA가 이등변삼각형이고 $\angle OQA=\frac{\pi}{2}$이므로 점 Q는 선분 PA의 중점이고 $\angle POQ=2\theta$이다. 선분 PO와 선분 QD가 평행하므로 삼각형 POA와 삼각형 QDA는 닮음이다.

따라서 $\overline{QD}=\boxed{\frac{1}{2}}$이고 $\angle QDA=\boxed{4\theta}$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\boxed{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}\times\sin(\boxed{4\theta})$

이다. $\overline{CQ}=\overline{CO}-\overline{QO}$이므로

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CQ}=\frac{1}{2}\sin 2\theta\times(1-\boxed{\cos 2\theta})$

이다. $p=\frac{1}{2}$, $f(\theta)=4\theta$, $g(\theta)=\cos 2\theta$이므로

$p\times f(\pi)\times g(\pi)=\frac{1}{2}\times 4\pi\times 1=2\pi$

17-1 정답 ①

[해설]

$\angle AFC=\alpha$, $\angle CDE=\beta$라 하자.

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle ECD=\angle EFB=\pi-\alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{ED}}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\overline{EC}}{\sin\beta}=10\sqrt{2}$

$\overline{ED}=10\sqrt{2}\times\sin\alpha=10\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$

$\overline{CD}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180=x^2+100-2\times x\times 10\times cos(\pi-\alpha)$

$\quad=x^2+100+2\times x\times 10\times cos\,\alpha$

$\quad=x^2+2\sqrt{10}x+100$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$이고 $x>0$이므로

$x=-\sqrt{10}+\sqrt{10+80}=2\sqrt{10}$

$\angle ABE=\angle CDE=\frac{\pi}{4}$이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AB}=2\sqrt{10}$이므로 $\overline{BE}=\overline{AE}=2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고 닮음비가 1 : 3이다.

$\overline{AF}=\frac{2}{3}\times\overline{AB}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AF}\times\overline{AE}\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{10}}{3}\times 2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{20}{3}$

17-2 정답 ①

[해설]

$\angle AFC=\alpha$, $\angle CDE=\beta$라 하자.

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$이므로 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\angle ECD=\angle EFB=\pi-\alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{ED}}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\overline{EC}}{\sin\beta}=12\sqrt{2}$

$\overline{ED}=12\sqrt{2}\times\sin\alpha=12\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=16$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$

$\overline{CD}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$256=x^2+144-2\times x\times 12\times\cos(\pi-\alpha)$

$\quad=x^2+144+2\times x\times 12\times\cos\alpha$

$\quad=x^2+8x+144$

$x^2+8x-112=0$이고 $x>0$이므로

$x=-4+8\sqrt{2}$

$\angle ABE=\angle CDE=\frac{\pi}{4}$이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AB}=-4+8\sqrt{2}$이므로 $\overline{BE}=\overline{AE}=-2\sqrt{2}+8$

따라서 삼각형 ADE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{AE}=\frac{1}{2}\times 16\times(-2\sqrt{2}+8)=64-16\sqrt{2}$

18-1 정답 17

[해설]

$\overline{DF}=x$, $\angle CDF=\theta$라 하면 $\angle BDE=\frac{\pi}{2}-\theta$이고 $\overline{AE}=\overline{DE}$이므로

$\overline{BE}=1-\overline{AE}=1-\overline{DE}$이다.

같은 방법으로

$\overline{AF}=\overline{DF}$이므로 $\overline{CF}=1-\overline{AF}=1-\overline{DF}$이다.
삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 사인법칙에 의해

삼각형 BDE에서 $\dfrac{1-\overline{DE}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{\overline{DE}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=2r_1$ …… ①

삼각형 CDF에서 $\dfrac{1-\overline{DF}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{DF}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=2r_2$ …… ②

이 성립한다.
$r_1=2r_2$이므로 $\overline{DE}=2\overline{DF}=2x$이고

①에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-2x)=2x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2x\cos\theta$

②에서 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-x)=x\sin\theta$이므로

두 식의 양변을 제곱하여 연립하면
$(1-2x)^2+4(1-x)^2=8x^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=8x^2$

$x=\dfrac{5}{12}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로 $p+q=17$이다.

[다른 풀이]
$\angle AED=\theta$라 두면 $\angle AFD=\pi-\theta$이고
$\angle BED=\pi-\theta$, $\angle CFD=\theta$이다.
삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 사인법칙에 의해

삼각형 BDE에서 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}=2r_1$

$\overline{BD}=2r_1\sin\theta$ …… ①

삼각형 DCF에서 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r_2$

$\overline{CD}=2r_2\sin\theta$ …… ②

①, ②에 의해 $\overline{BD}:\overline{CD}=r_1:r_2=2:1$이다.

$\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$이다.

$\overline{DF}=x$라 두면 $\overline{CF}=1-x$가 되어 삼각형 DCF에서
코사인법칙에 의해

$x^2=(1-x)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-2(1-x)\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}$

$x=\dfrac{5}{12}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로 $p+q=17$이다.

18-2 정답 17

[해설]
$\angle AED=\theta$라 두면 $\angle AFD=\pi-\theta$이고
$\angle BED=\pi-\theta$, $\angle CFD=\theta$이다.
삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 사인법칙에 의해

삼각형 BDE에서 $\dfrac{\overline{BD}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\overline{BD}}{\sin\theta}=2r_1$

$\overline{BD}=2r_1\sin\theta$ …… ①

삼각형 DCF에서 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2r_2$

$\overline{CD}=2r_2\sin\theta$ …… ②

①, ②에 의해 $\overline{BD}:\overline{CD}=r_1:r_2=3:1$이다.

$\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$에서 $\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.

$\overline{DF}=x$라 두면 $\overline{CF}=1-x$가 되어 삼각형 DCF에서
코사인법칙에 의해

$x^2=(1-x)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-2(1-x)\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\dfrac{\pi}{4}$

$x=\dfrac{5}{12}$

따라서 $p=12$, $q=5$이므로 $p+q=17$이다.

19-1 정답 ①

[해설]
$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$이고, $\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\overline{AC}=x$라 하자. 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot cos\frac{\pi}{3}$$
$$=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{1}{2}$$

이므로 $x=4$이다.

$\therefore\ \overline{AC}=4$

삼각형 ABC의 넓이는 S_1이다.

$$S_1=\frac{1}{2}\times3\times4\times sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$$

삼각형 ACD의 넓이는 S_2이고, $S_2=\dfrac{5}{6}S_1$이다.

$$\therefore\ S_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$\angle ADC=\theta$라 하자. $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$이므로 S_2는

$$\frac{1}{2}\times9\times sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{2},\qquad \sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore\ \sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이가 R이다. 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\theta}=2R,\qquad \frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R,\qquad R=\frac{18}{5\sqrt{3}}$$

이다.

$$\therefore \frac{R}{\sin(\angle \mathrm{ADC})} = \frac{\frac{18}{5\sqrt{3}}}{\frac{5\sqrt{3}}{9}} = \frac{54}{25}$$

19-2 정답 ①

[해설]

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{7}$ 이고, $\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{6}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AC}} = x$라 하자. 삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의하여

$$(\sqrt{7})^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이므로 $x = 5$이다.

$$\therefore \overline{\mathrm{AC}} = 5$$

삼각형 ABC의 넓이는 S_1이다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 5 \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

삼각형 ACD의 넓이는 S_2이고, $S_2 = \frac{4}{5}S_1$이다.

$$\therefore S_2 = 2\sqrt{3}$$

$\angle \mathrm{ADC} = \theta$라 하자. $\overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{CD}} = 10$이므로 S_2는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \sin\theta = 2\sqrt{3}, \qquad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\therefore \sin(\angle \mathrm{ADC}) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이가 R이다. 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta} = 2R, \qquad \frac{5}{\frac{2\sqrt{3}}{5}} = 2R, \qquad R = \frac{25}{4\sqrt{3}}$$

이다.

$$\therefore \frac{R}{\sin(\angle \mathrm{ADC})} = \frac{\frac{25}{4\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{3}}{5}} = \frac{125}{24}$$